Differenciálegyenletek és alkalmazásaik

Bsc szakdolgozat

Készítette: **Palotay Réka**

Matematika Bsc, matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Besenyei Ádám**, adjunktus

Alkalmazott Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozatomban a matematika egy olyan területét járom körül, amelynek az elméleti jelentőségén kívül a gyakorlatban is fontos szerepe van. Differenciálegyenletekkel a tudomány szinte minden ágában foglalkoznak. A biológia területén például, amikor egy populáció egyedszámának változását határozzák meg, vagy a fizika területén, szinte minden folyamat mondellezésében, de ugyanúgy használják a kémiában a radioaktív bomlás vizsgálatánál, és nagy szerepet játszik közgazdasági folyamatok leírásában is, és még sorolhatnám.

A differenciálegyenleteket Newton olyan fontosnak tartotta, hogy egyszer anagramma formájában a következőt közölte: „Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.", ami szabad fordításban annyit jelent, hogy „Hasznos dolog differenciálegyenleteket megoldani".

A differenciálegyenletek megoldására nincsen általános elmélet. Vannak azonban speciális alakú egyenletek, amelyekre léteznek megoldási módszerek. A dolgozatomnak nem célja bemutatni az összes ilyen típust. Inkább egy áttekintést szeretnék nyújtani azokról, amiket a gyakorlatban leggyakrabban használunk. Az első fejezetben az elsőrendű, azon belül is a szeparábilis (vagy szétválasztható), az elsőrendű lineáris és a homogén differenciálegyenletekről lesz szó. A második fejezetben áttérek a másodrendű differenciálegyenletekre. Végül a harmadik fejezetben a differenciálegyenlet-rendszerekkel foglalkozom. Végig nagy hangsúlyt fektetek a feladatokra, amelyekkel bemutatom az egyes típusok néhány alkalmazási területét. A dolgozat célja konkrét alkalmazások bemutatása.

2. fejezet

Elsőrendű differenciálegyenletek

A differenciálegyenlet olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen egy $x(t)$ függvény, és az egyenlet $t, x(t), x'(t), x''(t) \ldots$-t tartalmazza. Az elsőrendű differenciálegyenletnél csak t-től, $x(t)$-től és $x'(t)$-től függ az egyenlet. Általános alakja: $x'(t) = f(t, x(t))$. Az egyenlet megoldásai általánosan nem adhatók meg. Így a megoldható típusok közül fogunk most foglalkozni néhánnyal, amelyekre konkrét alkalmazásokat mutatunk.

2.1. Szeparábilis differenciálegyenletek

Az $x'(t) = g(t)h(x(t))$ alakú egyenleteket szeparábilis vagy szétválasztható egyenleteknek nevezzük.

Az ilyen fajta egyenleteket úgy oldjuk meg, hogy külön oldalra rendezzük a csak t-től, illetve csak x-től függő tényezőket:

$$x'(t) = g(t)h(x(t)) \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t).$$

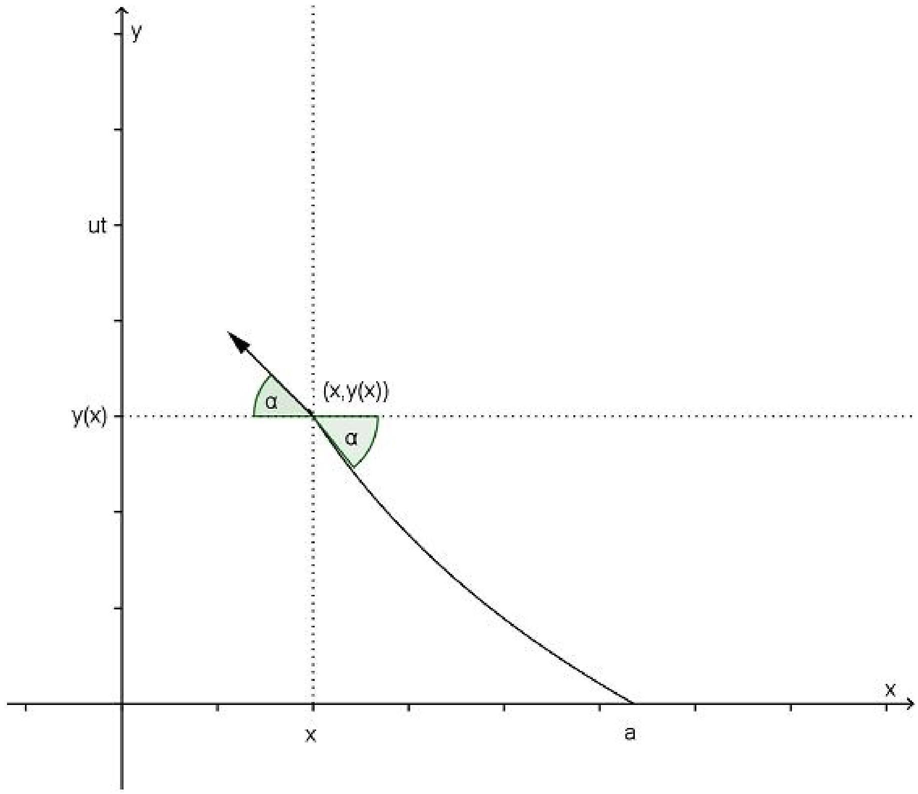
Tegyük fel, hogy létezik G függvény, amelyre $G' = g$ és H függvény, amelyre $H' = 1/h$. Ekkor az egyenletet $H'(x(t)) = G'(t)$ alakban írhatjuk fel. Ezt integrálva megkapjuk a megoldást implicit alakban: $H(x(t)) = G(t) + c$. Ebből $x(t)$-t kifejezve kapjuk az explicit megoldást.

A következő négy feladatot ennek a módszernek a segítségével oldjuk meg.

2.1.1. Egy üldözési probléma

A mező közepén áll egy nyúl. Megpillant egy rókát és egyből elkezd futni egyenesen az erdő irányába állandó sebességgel. De abban a pillanatban a róka is észreveszi a nyulat, amely szintén állandó sebességgel elkezd futni és mindig a nyúl felé halad, egészen addig amíg el nem kapja azt. Határozzuk meg a róka által megtett út görbéjének egyenletét.

Tegyük fel, hogy a nyúl kezdőpontja az origó, és fusson állandó u sebességgel az y tengely mentén pozitív irányba. A róka az x tengely a pontjából indul és állandó v sebességgel fut a nyúl irányába, és eközben az $y(x)$ függvény grafikonját írja le.



Ekkor a t pillanatban a nyúl a $(0, ut)$ pontban van, a róka pedig legyen az $(x, y(x))$ pontban. A róka sebességvektora az y függvény grafikonjának érintője, ezért

$$y'(x) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{ut - y(x)}{x}. \tag{2.1}$$

A róka által megtett út vt, amely a grafikon ívhossza, így

$$vt = \int_x^a \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Ebből kifejezve t-t és behelyettesítve a (2.1) egyenletbe:

$$y'(x)x = y(x) - \frac{u}{v}\int_x^a \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Legyen $u/v{=}\lambda$, ekkor

$$y'(x)x = y(x) - \lambda\int_x^a \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Deriválva mindkét oldalt x szerint:

$$y'(x) + y''(x)x = y'(x) + \lambda\sqrt{1 + (y')^2},$$

így az

$$y''(x)x = \lambda\sqrt{1+(y')^2}$$

egyenletet kapjuk. Most a változók szerint szétválasztva az egyenletet:

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1+(y')^2}} = \lambda\frac{1}{x}.$$

Integrálva az egyenlet mindkét oldalát, megkapjuk az általános megoldást:

$$\ln(y' + \sqrt{1+(y')^2}) = \lambda\ln(x) + c. \tag{2.2}$$

A konstans (c) érték meghatározásához felhasználjuk a kezdeti feltételt, ha $t = 0$, akkor $y' = 0$, $x = a$, tehát

$$c = \ln(1) - \lambda\ln(a) \Rightarrow c = -\lambda\ln(a).$$

Ezt behelyettesítve a (2.2) egyenletbe:

$$\ln(y' + \sqrt{1+(y')^2}) = \lambda\ln(x) - \lambda\ln(a) = \ln\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda},$$

ahonnan e alapra emelés után kapjuk, hogy

$$y' + \sqrt{1+(y')^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda}. \tag{2.3}$$

Alakítsuk át a következőképpen:

$$\frac{1}{y' + \sqrt{1+(y')^2}}\frac{y' - \sqrt{1+(y')^2}}{y' - \sqrt{1+(y')^2}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\lambda}$$

$$y' - \sqrt{1+(y')^2} = -\left(\frac{a}{x}\right)^{\lambda}. \tag{2.4}$$

Adjuk össze a (2.3) és a (2.4) egyenleteket:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda} - \left(\frac{a}{x}\right)^{\lambda}\right).$$

Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 1$ és integráljuk mindkét oldalt x szerint:

$$y = \frac{a^{-\lambda}}{2\lambda+2}x^{\lambda+1} - \frac{a^{\lambda}}{2-2\lambda}x^{-\lambda+1} + c.$$

A konstans (c) kiszámolásához felhasználjuk, hogy ha $x = a$ akkor $y = 0$. Így megkapjuk, hogy

$$c = \frac{a\lambda}{1-\lambda^2}.$$

A keresett függvény:

$$y(x) = \frac{a^{-\lambda}}{2\lambda+2}x^{\lambda+1} - \frac{a^{\lambda}}{2-2\lambda}x^{-\lambda+1} + \frac{a\lambda}{1-\lambda^2}.$$

Az $x = 0$ helyettesítéssel látszik, hogy, ha $\lambda > 1$ $(u > v)$, azaz a nyúl gyorsabb, mint a róka, akkor nem kapja el a róka a nyulat, mert $y(0) = \infty$, vagyis a róka sosem éri el az y tengelyt. Viszont, ha a $\lambda < 1$, azaz a róka gyorsabb, mint a nyúl, akkor elkapja, mert eléri az y tengelyt.

Vizsgáljuk meg most a $\lambda = 1$ esetet. Itt most az integrálás után azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{x^2}{4a} - \frac{a \ln x}{2} + c$$

A kezdeti feltételt felhasználva adódik, hogy

$$c = -\frac{a}{4} + \frac{a \ln a}{2}$$

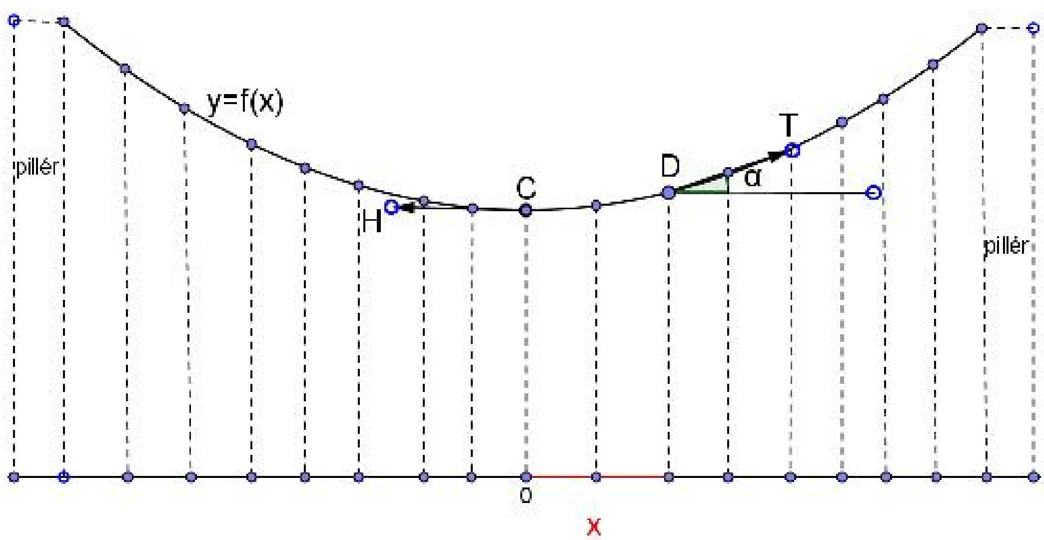
Tehát a $\lambda = 1$ esetben a keresett függvény:

$$y(x) = \frac{x^2}{4a} - \frac{a \ln x}{2} - \frac{a}{4} + \frac{a \ln a}{2}.$$

Ha $x = 0$, akkor $y(0) = \infty$, tehát a róka nem éri el az y tengelyt, ezért nem kapja el a nyulat.

2.1.2. A lánchíd kötelének görbéje

Határozzuk meg azt a görbét, amelyet egy lánchíd kötele alkot. Feltételezzük, hogy a kötél saját súlya elhanyagolható a kötél által tartott útpálya súlyához képest.



Helyezzük el az ábrát egy koordináta-rendszerben, ahol legyen C a kötél legalsó pontja, és ez legyen az y tengelyen. Valamint legyen D a lánc egy tetszőleges másik pontja. Ekkor a kötél CD szakasza egyensúlyban van a C pontban a vízszintes húzóerő (H), a D pontban a kötél menti feszítőerő (T) és a hídpálya C és D közötti részének súlya hatására.

A hídpálya C és D közötti részének súlya arányos az x hosszával, ezért kx-el egyenlő, ahol k az egységnyi hosszú útpálya súlya.

Mivel CD nyugalomban van, ezért a rá ható erők összes függőleges és vízszintes komponenseinek összege nulla. Legyen α a D pontbeli kötélerő szöge. Ekkor a függőleges erőkre igaz, hogy:

$$kx = T \sin \alpha.$$

A vízszintes erőkre pedig, hogy:

$$H = T \cos \alpha.$$

A két egyenletet egymással elosztva:

$$\frac{kx}{H} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Mint tudjuk: $\operatorname{tg} \alpha = dy/dx$, ezért $kx/H = dy/dx$. Válasszuk szét az egyenletet változók szerint:

$$dy = \frac{kx}{H} dx,$$

majd integrálva mindkét oldalt megkapjuk a megoldást

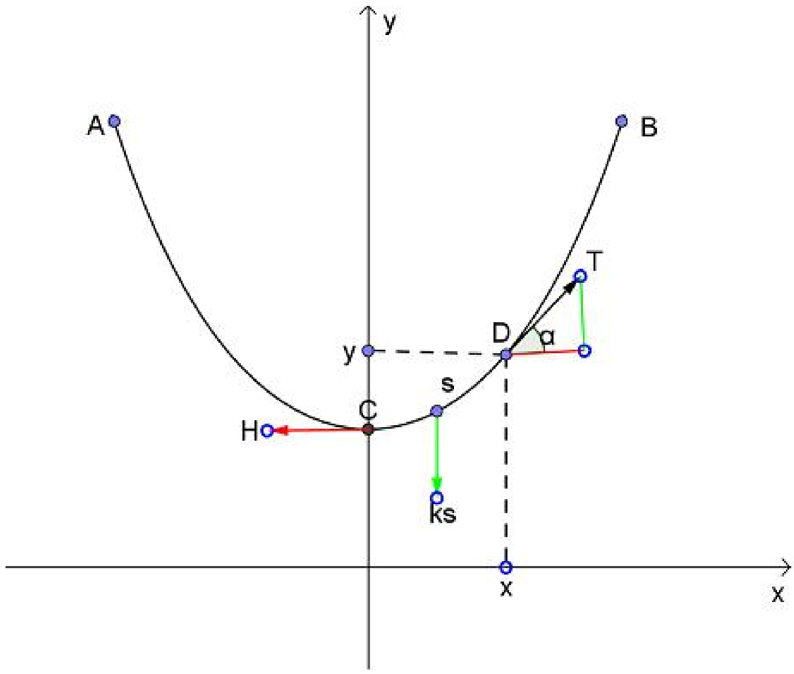
$$y = \frac{k}{2H} x^2 + c,$$

egy parabolasereg. Ez a kötél felfüggesztési görbéje, feltéve, hogy a kötél súlyát elhanyagoljuk, és az útpálya súlyát vesszük figyelembe.

2.1.3. Láncgörbe

Ez a feladat annyiban tér el az előzőtől, hogy most azt vizsgáljuk, hogy milyen alakot vesz fel a két végén felfüggesztett, hajlékony kötél a saját súlyának hatására.

Ábrázoljuk a kötelet egy koordináta rendszerben, és vizsgáljuk a kötél CD darabját.



Itt is felírhatjuk a következő egyenleteket, mint a lánchíd esetében:

$$ks = T\sin\alpha,$$

$$H = T\cos\alpha,$$

ahol k az egységnyi hosszú kötél súlya, s a CD ív hossza, azaz $s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}$, H a C pontban a vízszintes húzóerő, T pedig a D pontban az érintő irányú kötélerő. Ebből, az előző feladatban leírt módon kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ks}{H}.$$

Ezek után, hogy az s ismeretlent kiküszöböljük, x szerint differenciáljuk az egyenletet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{H}\frac{ds}{dx}. \tag{2.5}$$

Tudjuk, hogy $d^2y/dx^2 = y''$ és $ds/dx = \sqrt{1+(y')^2}$, mivel $s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}$. Ezeket visszahelyettesítve a (2.5)-be

$$y'' = \frac{k}{H}\sqrt{1+(y')^2}$$

egyenletet kapjuk. Legyen $k/H = 1/a$, és válasszuk szét az egyenletet a változók szerint:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{a},$$

majd integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\ln(y' + \sqrt{1+(y')^2}) = \frac{1}{a}x + c_1.$$

A konstanst (c_1) a kezdeti feltételből határozzuk meg. Mivel a C pontbeli érintő párhuzamos az x tengellyel, ezért ha $x = 0$, akkor $y' = 0$. Így:

$$\ln(1) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

c_1-et visszahelyettesítve megkapjuk az általános megoldást:

$$\ln(y' + \sqrt{1 + (y')^2}) = \frac{x}{a}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát e alapra emeljük:

$$y' + \sqrt{1 + (y')^2} = e^{x/a}. \tag{2.6}$$

Ezek után átalakítjuk az egyenletet úgy, hogy megszorozzuk mindkét oldalát $y' - \sqrt{1 + (y')^2}$-al és átrendezzük:

$$y' - \sqrt{1 + (y')^2} = -e^{-x/a}. \tag{2.7}$$

A (2.6) és a (2.7) egyenletet összeadjuk és átrendezzük:

$$y' = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}).$$

Az egyenlet szét van választva változók szerint, így integrálva a következőre jutunk:

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) + c_2 = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c_2.$$

Ezzel megkaptuk a görbe egyenletét. Tehát a két végén felfüggesztett kötél a cosinus hiperbolikus függvény grafikonjának alakját veszi fel. Ezért szokás ezt a grafikont láncgörbének nevezni.

2.1.4. Hókotrás egy hókotróval

Éjfél előtt valamennyivel elkezd esni a hó. Éjfélre már annyi hó esett, hogy a város polgármestere úgy dönt, hogy elindít egy hókotrót. A hókotró az első két órában két mérföldet takarít le. Ennyi idő alatt viszont még több hó gyűlt össze az úton, ezért a második két órában már csak egy mérföldet tud letakarítani. Határozzuk meg, hogy mikor kezdett el esni a hó. Feltételezzük, hogy a hókotró egyforma időközök alatt egyforma mennyiségű havat takarít el.

Vezessünk be néhány jelölést:

b: hóesés méter/óra,

c: a hókotrás sebessége méter $\times$ mérföld/óra,

h: ennyivel éjfél előtt kezdett el esni a hó,

t: eltelt idő,

$x(t)$: t idő elteltével ennyi mérföldet takarított el a hókotró.

A t időpontban a hókotró előtt álló hó magassága $b(h+t)$. Kis Δt idő alatt ekkor a hókotró $c\Delta t$ havat kotor el, ami körülbelül $(x(t+\Delta t)-x(t))b(h+t)$, hiszen feltételezhetjük, hogy az $x(t), x(t+\Delta t)$ szakaszon a hó magassága konstans, mert Δt pici. Ebből következően:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{c}{b(h+t)},$$

ahonnan $\Delta t \to 0$ után kapjuk, hogy

$$x'(t) = \frac{c}{b(h+t)}.$$

Ebből $x(t)$-t integrálással kaphatjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t x'(t) = \frac{c}{b}\left[\log(h+t) - \log(h)\right].$$

A kezdeti feltétel segítségével meghatározzuk h-t.

Kezdeti feltételek: $x(2) = 2$ és $x(4) = 3$. Ebből:

$$2 = \frac{c}{b}\left[\log(h+2) - \log(h)\right],$$

$$3 = \frac{c}{b}\left[\log(h+4) - \log(h)\right].$$

A két egyenletet elosztva egymással:

$$\frac{2}{3} = \frac{\log(h+2)-\log(h)}{\log(h+4)-\log(h)} \Rightarrow h = \sqrt{5}-1.$$

Ezt visszahelyettesítve $x(t)$-be kapjuk, hogy

$$x(t) = \frac{c}{b}\left[\log(\sqrt{5}-1+t) - \log(\sqrt{5}-1)\right].$$

Tehát éjfél előtt körülbelül 1 órával és 14 perccel kezdett el esni a hó. Az $x(t)$ függvény alakjából látszik, hogy $t \to \infty$ esetén $x(t) \to \infty$, de $x'(t) \to 0$. A hókotró tehát bármilyen messze eljut, de egyre lassabban halad.

2.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Térjünk át az elsőrendű differenciálegyenletek egy következő fajtájára, az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekre. Akkor nevezzük ezeket az egyenleteket lineárisnak, ha $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ alakúak.

Megoldási módszer: Első lépésként megoldjuk a homogén differenciálegyenletet. Egy differenciálegyenletet akkor hívunk homogénnek, ha $b(t) \equiv 0$. Ekkor az

$x'(t) = a(t)x(t)$ egyenletünk marad, amit az előző részben tárgyalt módszerrel oldunk meg: tehát változók szerint szétválasztjuk az egyenletet és integráljuk. Ennek a megoldása $x(t) = Ce^{A(t)}$, ahol $A'(t) = a(t)$. Majd ennek az általános megoldásában lévő C konstans helyére olyan $C(t)$ függvényt írunk, hogy azzal megoldást kapjunk az eredeti inhomogén egyenletre. Ezt úgy tesszük, hogy a $C(t)e^{A(t)}$ függvényt behelyettesítjük az egyenletbe:

$$C'(t) = \frac{b(t)}{e^{A(t)}}.$$

Ebből pedig már integrálással megkapjuk $C(t)$-t, amit visszahelyettesítünk a homogén egyenlet általános megoldásába, és így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kapjuk. Ekkor az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, ahol x_h a homogén egyenlet általános megoldása és x_p az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

Nézzünk erre egy feladatot. Ez a feladat hasonlít az előző hókotrós példára, azzal a különbséggel, hogy most három hókotrónk van, amelyekről további információkat is tudunk.

2.2.1. Hókotrás három hókotróval

A szituáció hasonló mint az előző feladatban, megint elkezd esni a hó valamivel éjfél előtt. Most is úgy dönt a város polgármestere, hogy éjfélkor elindít egy hókotrót. Viszont most a városnak három hókotrója van. És mivel úgy látja a polgármester, hogy egykor még mindig nagyon esik a hó, ezért elindítja a második hókotrót is ugyanazon az úton, mint az elsőt. A harmadik hókotróval ugyanez lesz a helyzet, kettőkor indul el ugyanazon az úton. Kis idő múlva azonban összetalálkoznak. Határozzuk meg, hogy mikor találkoznak össze és mikor kezdett el esni a hó.

Jelölések:

n: ennyivel éjfél előtt kezdett el esni a hó,

x_1, x_2, x_3: jelöli az első, második és harmadik hókotró által megtett utat t időpillanatban,

T: az az időpont, amikor a három hókotró találkozik,

d: az a hely, ahol a három hókotró találkozik.

A haladási sebesség fordítottan arányos az addigi hóeséssel, ezt láttuk a korábbi hókotrós feladatban. Feltételezzük, hogy az arányossági tényező 1. Ekkor ezt tudjuk az első hókotróról:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t+n}.$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, úgyhogy átrendezés után tudjuk integrálni:

$$\int 1 dx_1 = \int \frac{dt}{t+n}.$$

Amiből az

$$x_1 + c = \log(t + n) \tag{2.8}$$

egyenlethez jutunk. Ezután kiszámoljuk a konstans tagot (c) a kezdeti feltételből. Ha $x_1 = 0$, akkor $t = 0$:

$$c = \log(n).$$

Ezt visszahelyettesítjük a (2.8) egyenletbe és az egyenletet e alapra emeljük, majd átrendezzük:

$$t(x_1) = n(e^{x_1} - 1).$$

Ez azt jelenti, hogy az első hókotró az x_1 helyen az $n(e^{x_1} - 1)$ időpontban volt. A második hókotróról a következőt tudjuk:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t - t_1},$$

ahol t_1 azt az időpontot jelöli, amikor az első hókotró $x_2(t)$ helyen volt. Behelyettesítve az előzőekben megkapott $t_1(x_2)$-t ebbe az egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t - n(e^{x_2} - 1)}.$$

Ennek a kiszámolása elég bonyolult lenne, ezért az egyszerűség kedvéért most nem az x_2-t nézzük az idő függvényében, hanem az időt, az x_2 függvényében:

$$\frac{dt}{dx_2} = t - n(e^{x_2} - 1).$$

Mivel ez egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, ezért először megoldjuk a homogén egyenletet:

$$\int \frac{dt}{t} = \int 1 dx_2.$$

Ami nem más, mint:

$$\log(t) = x_2 + c.$$

Ezt e alapra emelve kapjuk, hogy

$$t = e^{x_2 + c} = e^{x_2} c$$

Partikuláris megoldást keresünk:

$$t'(x_2) = e^{x_2} c(x_2) + e^{x_2} c'(x_2) = e^{x_2} c(x_2) - n(e^{x_1} - 1)$$

Ebből:

$$c'(x_2) = -n + \frac{n}{e^{x_2}},$$

ezt integrálva:

$$c(x_2) = -nx_2 - \frac{n}{e^{x_2}} + c.$$

Tehát:

$$t(x_2) = e^{x_2}\left(-nx_2 - \frac{n}{e^{x_2}} + c\right) = -nx_2e^{x_2} - n + ce^{x_2}. \tag{2.9}$$

A konstanst ismét a kezdeti feltételből számoljuk ki. A második hókotró esetében, ha $x_2 = 0$, akkor $t = 1$:

$$c = 1 + n.$$

Ezt visszahelyettesítjük a (2.9)-be, és így megkapjuk $t(x_2)$-t:

$$t(x_2) = -nx_2e^{x_2} - n + (1+n)e^{x_2} = e^{x_2}(1 + n - nx_2) - n.$$

A harmadik hókotróról tudjuk, hogy

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{t - t_2},$$

ahol t_2 azt az időpontot jelöli, amikor a második hókotró az $x_3(t)$ helyen volt. Ugyanazzal a módszerrel számoljuk ki a $t(x_3)$-t, mint az előzőekben, csak most $t_2(x_3)$-t helyettesítünk be:

$$t(x_3) = e^{x_3}\left(-x_3 - nx_3 + \frac{n}{2}x_3^2\right) - n + e^{x_3}c. \tag{2.10}$$

Itt a konstanst a harmadik hókotróra vonatkozó kezdeti feltételből számoljuk ki. Ha $x_3 = 0$, akkor $t = 2$:

$$c = 2 + n,$$

ezt a (2.10) egyenletbe helyettesítjük, hogy megkapjuk $t(x_3)$-t:

$$t(x_3) = e^{x_3}\left(-x_3 - nx_3 + \frac{n}{2}x_3^2\right) - n + e^{x_3}(2+n) = e^{x_3}\left(2 + n - x_3 - nx_3 + \frac{n}{2}x_3^2\right) - n.$$

Így keletkezett három egyenletünk, amelyek segítségével ki tudjuk számolni, hogy mikor találkoztak a hókotrók és mikor kezdett el esni a hó. A három egyenlet a következő:

$$\begin{aligned} t(x_1) &= n(e^{x_1} - 1), \\ t(x_2) &= e^{x_2}(1 + n - nx_2) - n, \\ t(x_3) &= e^{x_3}\left(2 + n - x_3 - nx_3 + \frac{n}{2}x_3^2\right) - n. \end{aligned}$$

Valamint tudjuk, hogy T időpontban találkoztak, és d helyen. Azaz $t(x_1) = t(x_2) = t(x_3) = T$ és $x_1 = x_2 = x_3 = d$. Ezeket behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} T &= n(e^d - 1), \\ T &= e^d(1 + n - nd) - n, \\ T &= e^d\left(2 + n - d - nd + \frac{n}{2}d^2\right) - n. \end{aligned}$$

Innen
$$\frac{T+n}{e^d} = n = 1 + n - nd = 2 + n - d - nd + \frac{n}{2}d^2.$$
Ebből (az $n = 1 + n - nd$-t felhasználva):
$$n = 1 + n - dn \Rightarrow d = \frac{1}{n}.$$
$d = 1/n$-t behelyettesítjük az $n = 2 + n - d - nd + (n/2)d^2$ egyenletbe:
$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow d = 2.$$
Ezeket behelyettesítjük a $(T+n)/e^d = n$ egyenletbe:
$$T = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = 3,195.$$
Tehát megtudtuk, hogy 23:30-kor kezdett el esni a hó, és körülbelül 3 óra 12 perckor találkozott össze a három hókotró.

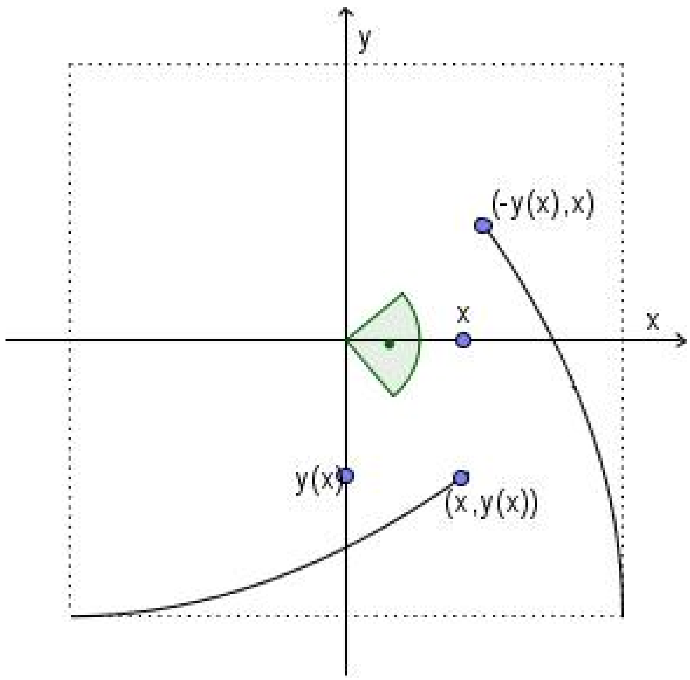
2.3. Homogén differenciálegyenletek

Az elsőrendű differenciálegyenletek e dolgozaton belül vizsgált utolsó fajtája az
$$x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right) = g\left(\frac{\alpha x(t)}{\alpha t}\right)$$
alakú egyenletek, amelyeket homogén differenciálegyenletnek nevezünk.

Megoldási módszer: Bevezetjük az $y(t) = x(t)/t$ új ismeretlen függvényt. Ebből kifejezzük $x(t)$-t, majd deriváljuk és visszahelyettesítjük az előző egyenletbe. Így egy szétválasztható differenciálegyenletet nyerünk y-ra nézve. Tehát:
$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \Rightarrow x(t) = ty(t) \Rightarrow x'(t) = y(t) + ty'(t),$$
amit az egyenletbe helyettesítve:
$$y(t) + ty'(t) = g(y(t)).$$
Átrendezve látszik, hogy szétválasztható differenciálegyenlethez jutottunk:
$$y'(t) = \frac{1}{t}(g(y(t)) - y(t)) \Rightarrow \frac{y'(t)}{(g(y(t)) - y(t))} = \frac{1}{t}.$$
Használjuk fel ezt a módszert a következő két feladat megoldásában.

2.3.1. Újabb üldözési feladat

Egy négyzet alakú szoba négy sarkában ül egy-egy kutya. Mindegyik ugyanabban a pillanatban észreveszi a tőle jobbra ülőt, és elkezd az ő irányába futni ugyanazzal az állandó sebességgel. Milyen pályán mozognak a kutyák?



Nyilván elég csak az egyik kutya pályáját kiszámolni, hiszen a négy kutya pályája a szoba közepére nézve forgásszimmetrikus. A forgásszimmetria miatt a négy kutya mindig egy-egy négyzet sarkában fog elhelyezkedni, csak a négyzet folyamatosan zsugorodik és fordul. Helyezzük el a kutyákat a koordináta rendszerben úgy, hogy az origó van középen és a négy kutya az $(1,1),(1,-1),(-1,-1)$, és $(-1,1)$ pontokban áll. Tegyük fel, hogy a kutyák u sebességgel futnak egymás irányába és legyen $y(x)$ az egyik kutya által leírt pálya. Ekkor $y'(x)$ a pálya meredeksége $\operatorname{tg}\alpha$:

$$y' = \frac{x-y}{-y-x} = \frac{(y/x)-1}{(y/x)+1}.$$

Helyettesítsünk y/x helyére z-t $\Rightarrow y = zx$ és $y' = z + z'x$. A behelyettesítésekkel a következő egyenletet kapjuk:

$$z + z'x = \frac{z-1}{z+1}.$$

Átrendezve a következőre jutunk:

$$\frac{1}{x} + \frac{z+1}{z^2+1}z' = 0.$$

Ezt integrálva:

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|z^2+1| + \operatorname{arctg}(z) + c = 0.$$

Átalakítjuk, és y/x-t visszahelyettesítjük:

$$0 = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c.$$

Ezek után áttérünk polárkoordinátákra ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ és $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$):

$$\ln(r) + \varphi + c = 0.$$

Ezt az egyenletet átrendezzük és e alapra emeljük mindkét oldalát:

$$r(\varphi) = ce^{-\varphi}.$$

Ekkor megkaptuk a keresett pálya egyenletét, amely egy logaritmikus spirál.
Most számoljuk ki ennek az ívhosszát is, hogy megtudjuk milyen hosszú utat tesznek meg a kutyák, mire elkapják egymást. Ehhez az ívhossz képlete: $S = \int_\beta^\alpha \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$.

$$S = \int_\beta^\alpha \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = \int_\beta^\alpha \sqrt{c^2e^{-2\varphi} + c^2e^{-2\varphi}}d\varphi = \sqrt{2}c\int_\beta^\alpha e^{-\varphi}d\varphi = \sqrt{2}c\left[e^{-\varphi}\right]_\beta^\alpha.$$

A kezdeti feltételből meghatározzuk a konstanst(c):

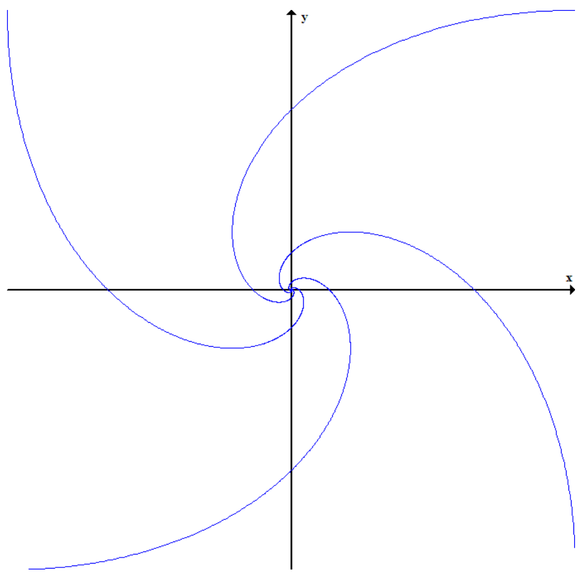
$$\begin{aligned} r\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -ce^{-\pi/4} = \sqrt{2}, \\ c &= -\sqrt{2}e^{\pi/4}, \\ r(\varphi) &= -\sqrt{2}e^{\pi/4-\varphi}. \end{aligned}$$

c-t behelyettesítjük és így megkapjuk az ívnek a hosszát:

$$S = -\sqrt{2}\sqrt{2}e^{\pi/4}\left[e^{-\varphi}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} = -2e^{\pi/4}\left[e^{-\varphi}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} = 2,$$

ami megegyezik a kezdeti négyzet oldalának hosszával. Mire elkapják egymást a kutyák, végtelen sokszor megkerülik az origót, de véges időn belül odaérnek.

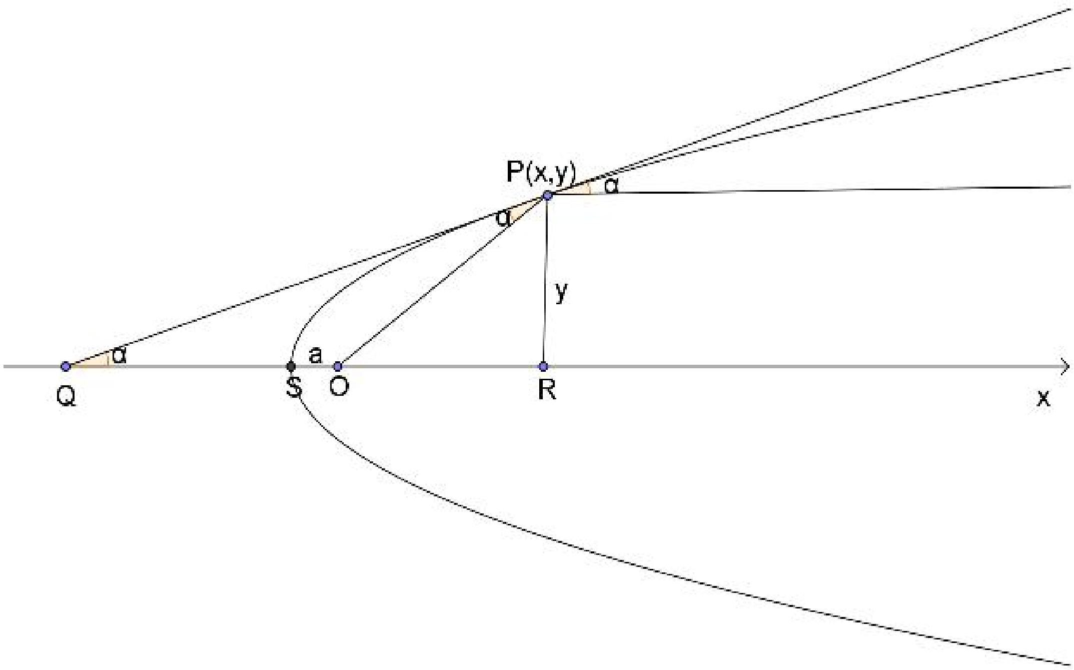
A kutyák a következő pályákat írják le:



2.3.2. A tükör alakja

Tegyünk egy égő gyertyát az asztalra. Majd próbáljunk meg úgy elhelyezni egy tükröt, hogy a gyertya fénye tükröződjön benne, és a visszavert fénysugarak párhuzamosak legyenek az asztallal.

A fényforrást (gyertyát) helyezzük el az origóba (O pontba), legyen az asztal az x tengely. Úgy helyezzünk el a tükröt, hogy a visszavert fénysugarak párhuzamosak legyenek az x tengellyel. Milyen alakú tükröt kell választanunk?



Nézzük a tükör és az xOy síknak metszetéből adódó görbét. Tudjuk, hogy a fénysugár beesési szöge egyenlő a visszaverődési szögével (ez a szög legyen α). Így az OQP szög α. Ebből következik, hogy az OQP háromszög egyenlőszárú. Így: $|OQ| = |OP|$ és $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ezért $|OQ|$ is egyenlő $\sqrt{x^2 + y^2}$-tel.

Ha $y > 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

Megszorozzuk a számlálót és a nevezőt is $\sqrt{x^2 + y^2} - x$-el:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}.$$

Majd átrendezzük az egyenletet:

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1,$$

és ezt integrálva kapjuk, hogy:

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c.$$

y^2-re rendezzük az egyenletet:

$$y^2=2cx+c^2.$$

Ebből látszik, hogy ez a görbe parabola. Mivel a görbe szimmetrikus az Ox tengelyre, ezért ez a képlet $y<0$ esetben is igaz. Legyen a fényforrás (O) és a tükör középpontjának (S) távolsága a. Így a kezdeti feltétel: ha $x=-a$, akkor $y=0$. Ebből ki tudjuk számolni a konstans (c) értékét:

$$0=-2ac+c^2,$$

amiből $c=2a$ vagy $c=0$. De a $c=0$ a feladat szempontjából nem megfelelő, így a kapott parabola egyenlete:

$$y^2=4ax+4a^2.$$

A parabola egyenlete $y^2-k=4p(x-h)$, ahol (h,k) a parabola csúcspontja, és p a csúcspont és a fókuszpont közötti távolság. Itt $(h,k)=(-a,0)$, azaz $y^2=4px+4pa$. Ebből ki tudjuk számolni p értékét: $4px+4pa=4ax+4a^2$, tehát $p=a$, így a fényforrás éppen a fókuszpontban van. Az Ox tengely körül megforgathatjuk az xOy síkot (amelyben a parabola fekszik), ekkor a parabola nem változik. Ezért a tükör felülete forgásparaboloid.

3. fejezet

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Az $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t) = b(t)$ alakú egyenleteket nevezzük másodrendű lineáris differenciálegyenleteknek, ahol $p, q, b : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, és keressük az $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ha $b(t) \equiv 0$, akkor az egyenlet homogén, ellenkező esetben inhomogénnek nevezzük. Ennek a differenciálegyenletnek minden megoldása előáll $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ alakban, ahol x_0 az inhomogén egyenlet általános megoldása, x_1 és x_2 a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Most csak az állandó együtthatós speciális esetet vizsgáljuk.

Így az egyenlet: $x''(t)+px'(t)+qx(t) = b(t)$, ahol $p, q \in \mathbb{R}$. A homogén egyenletnek keressük az $x(t) = e^{\lambda t}$ alakú megoldását. Ekkor $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ egyenletet kapjuk λ-ra. Ennek gyökei λ_1, λ_2.

Három esetet különböztetünk meg:

1. Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ és $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$.

2. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $x_1(t) = e^{\lambda t}$ és $x_2(t) = te^{\lambda t}$.

3. Ha $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ és $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Ekkor $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ és $x_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Ebből az összes megoldást így kapjuk meg: $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$. Miután meghatároztuk a homogén egyenlet megoldásait, meghatározzuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását is.

Ezt egy speciális esetben nézzük, amikor az egyenlet állandó együtthatós és az inhomogén tag speciális alakú. Ezt a határozatlan együtthatók módszerének hívjuk. Legyen p, q konstans és

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = e^{\alpha t}(a_1(t)\cos\beta t + a_2(t)\sin\beta t), \tag{3.1}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $x_0(t) = e^{\alpha t}(c_1(t)\cos\beta t + c_2(t)\sin\beta t)$ alakban keressük. A továbbiakban négy esetet vizsgálunk:

1. Ha
$$(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q)^2 + ((2\alpha + p)\beta)^2 > 0,$$
akkor a (3.1) egyenletnek létezik
$$x_0(t) = e^{\alpha t}(c_1(t)\cos\beta t + c_2(t)\sin\beta t)$$
alakú megoldása.

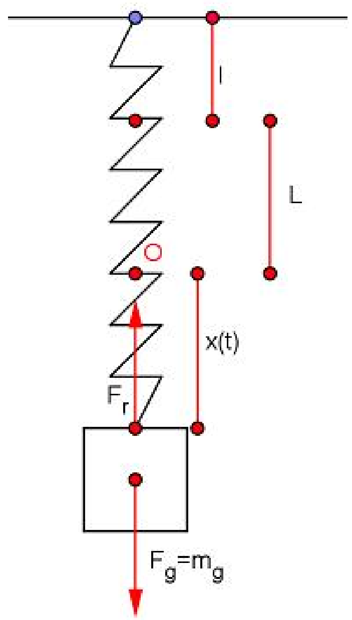
2. Ha $\beta = 0$, $p^2 > 4q$ és α gyöke a $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ karakterisztikus egyenletnek, akkor a (3.1)-nek létezik megoldása, ami $x_0(t) = cte^{\alpha t}$ alakú.

3. Ha $\beta = 0$, $p^2 = 4q$ és α gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor létezik $x_0(t) = ct^2e^{\alpha t}$ alakú megoldása a (3.1)-nek.

4. Ha $\alpha = -\frac{p}{2}$ és $\beta^2 = 4q - p^2 > 0$, akkor a (3.1)-nek létezik $x_0(t) = te^{\alpha t}(c_1(t)\cos\beta t + c_2(t)\sin\beta t)$ alakú megoldása.

A másodrendű lineáris egyenletek egy szép alkalmazását adják a mechanikai rezgések. A következőkben ezt fogjuk megvizsgálni egy kicsit részletesebben.

3.1. Mechanikai rezgések



Vegyünk egy függőlegesen felfüggesztett rugót, melyre felakasztunk egy m tömegű testet, ekkor a rugó megnyúlik és egyensúlyi helyzetbe kerül. Ezután megnyújtjuk a rugót, így kezdeti sebességet adva a testnek, majd magára hagyjuk. Tapasztalataink szerint ilyenkor a rugó igyekszik az egyensúlyi helyzetét visszaállítani. Határozzuk meg ezt a mozgást leíró egyenletet.

Vizsgáljuk a rugót egy függőleges koordináta rendszerben, ahol a pozitív irány lefelé mutat, az origó pedig a test nyugalmi helyzeténél van. Jelöljük l-el a rugó megnyúlás előtti hosszát, L-el a rugó megnyúlását a test felakasztása után, $x(t)$-vel pedig a t időpontban a rugó nyugalmi helyzethez viszonyított megnyúlását. Newton második törvényét alkalmazzuk a mozgásegyenlet felírásához, amely azt mondja, hogy a test tömegének és gyorsulásának szorzata megegyezik a rá ható erők eredőjével: $F = ma$.

A test gyorsulása: $a = dv/dt = dx'/dt = x''$

A testre ható erők a következők:

1. Súlyerő (gravitációs erő): $F_g = mg$. Mindig pozitív irányba hat.

2. Rugóerő (visszatérítő erő): F_r. Hooke törvénye szerint a rugóerő nagysága arányos a rugó megnyúlásával és vele ellentétes irányú. A rugó teljes megnyúlása $L + x$, ezért $F_r = -k(L + x)$, ahol $k > 0$ a rugóállandó.

3. Súrlódási erő: F_s. A mozgás irányával ellentétes és arányos a sebesség nagyságával. Így: $F_s = -cx'$, ahol $c > 0$ a súrlódási együttható.

4. Testre ható egyéb külső erők: $F_k = F(t)$.

Így a mozgás egyenlete:

$$mx'' = F_g + F_r + F_s + F_k = mg - k(L + x) - cx' + F(t).$$

Mivel egyensúlyi helyzetben a rugóerő közömbösíti a súlyerőt, ezért $mg = kL$. Így átrendezéssel a következő konstans együtthatós másodrendű differenciálegyenletet kapjuk:

$$mx'' + cx' + kx = F(t).$$

Több esetet fogunk vizsgálni. Először a harmonikus rezgőmozgást, ahol a súrlódási erőt és a külső erőt is elhanyagoljuk, azután a csillapított rezgő mozgást, ahol külső erő nem hat a testre, de van súrlódás, és végül a kényszerrezgést, ahol van kényszererő, de a súrlódástól eltekintünk.

3.1.1. Harmonikus rezgőmozgás

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor a súrlódási erő elhanyagolható, és nem hat külső erő a testre. Ezt hívjuk **harmonikus rezgőmozgásnak**. Ekkor fizikai tapasztalataink szerint, ha kitérítjük a rugót, akkor a végtelenségig fel-le fog mozogni. Ezt most matematikailag is belátjuk.

Mivel $c = 0$ és $F(t) = 0$, így az egyenletünk:

$$mx'' + kx = 0.$$

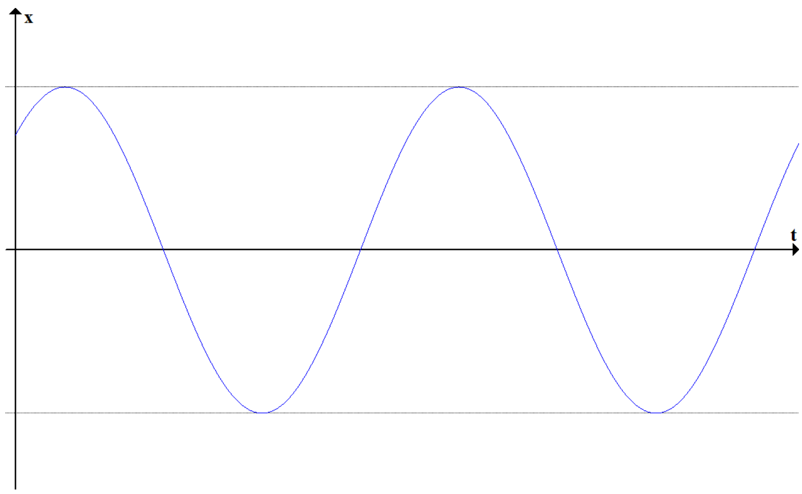
Jelöljük $\sqrt{k/m}$-t ω_0-al. Ekkor a mozgás egyenlete: $x'' + \omega_0^2 x = 0$. Az egyenletünk a 3. esethez tartozik, mivel a $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke $\pm i\omega_0$. Ezért az egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Ezt addíciós képlet segítségével egyszerűbbb alakra hozhatjuk. Vezessük be $A \geq 0$-t és δ-t úgy, hogy legyen $c_1 = A \sin \delta$ és $c_2 = A \cos \delta$. Mivel $A^2 \sin^2 \delta + A^2 \cos^2 \delta = c_1^2 + c_2^2$, ezért $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Ha $A = 0$, akkor legyen δ tetszőleges. Ha $A > 0$, akkor $\operatorname{tg} \delta = c_1/c_2$. Így a következőképpen alakul az egyenletünk:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = A \sin \delta \cos \omega_0 t + A \cos \delta \sin \omega_0 t = A \sin(\omega_0 t + \delta).$$

A mozgás tehát szinuszos rezgés, melynek periódusa $2\pi/\omega_0$. Az $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a rendszer saját frekvenciája, és δ a fázisszög. Az $x(t)$ kitérés A és $-A$ közé esik, A a mozgás amplitudója.



Azt kaptuk tehát, hogy ha nincs súrlódás és nem hat külső erő a testre, akkor a rugó ω_0 frekvenciájú szinuszos rezgést végez.

3.1.2. Csillapított rezgőmozgás

A harmonikus rezgőmozgás a valóságban nem valósítható meg, mert a súrlódást teljesen nem tudjuk kiküszöbölni. Ezért most nézzük azt az esetet, amikor van súrlódás is, de még mindig nem hat külső erő a testre. Ezt **csillapított rezgőmozgásnak** nevezzük.

Mivel a c súrlódási együttható már nem nulla, ezért a következőképpen alakul az egyenletünk:

$$mx'' + cx' + kx = 0.$$

Ezt egy kicsit átrendezzük, és alkalmazzuk az előző részben már bevezetett $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ jelölést. Így az $x'' + (c/m)x' + \omega_0 x = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek a karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + (c/m)\lambda + \omega_0 = 0$, melynek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4m^2\omega_0^2}}{2m}.$$

Három esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy a c nagyobb, egyenlő vagy kisebb, mint $2m\omega_0$.

1. Nézzük először azt az esetet, amikor $c > 2m\omega_0$. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek két gyöke van, és az általános megoldás:

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

   ahol $\lambda_1 = \frac{-c+\sqrt{c^2-4m^2\omega_0^2}}{2m}$ és $\lambda_2 = \frac{-c-\sqrt{c^2-4m^2\omega_0^2}}{2m}$.

   Láthatóan $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, ezért ha $t \to \infty$, akkor $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \to 0$. Egyensúlyi helyzet akkor van, amikor ez egyenlő 0-val, tehát $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0$, azaz $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -c_2/c_1$. Ha $-c_2/c_1 < 0$, akkor egyszer megy át a függvény az egyensúlyi helyzeten, ha nagyobb, mint 0, akkor egyszer sem megy át. A 0-hoz tartás nagyságrendje $e^{-\lambda_1 t}$. Ezt hívjuk túlcsillapításnak.

2. A második esetben $c = 2m\omega_0$. Ekkor az egyenletnek $\lambda = -c/2m$ az egyetlen gyöke. Így az általános megoldás:

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = c_1 e^{-(c/2m)t} + c_2 t e^{-(c/2m)t}.$$

   Itt is az figyelhető meg, mint az előző esetben, ha $t \to \infty$, akkor $x(t) \to 0$ (mert e^{-at} gyorsabban tart 0-hoz, mint $te^{at}\infty$-hez). A 0-hoz tartás nagyságrendje $e^{-(c/2m)t}$. Ezt kritikus csillapításnak nevezzük.

3. Végül amikor $c < 2m\omega_0$, akkor nincs az egyenletnek valós gyöke. Ezért az általános megoldás a következőképpen alakul:

   $$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

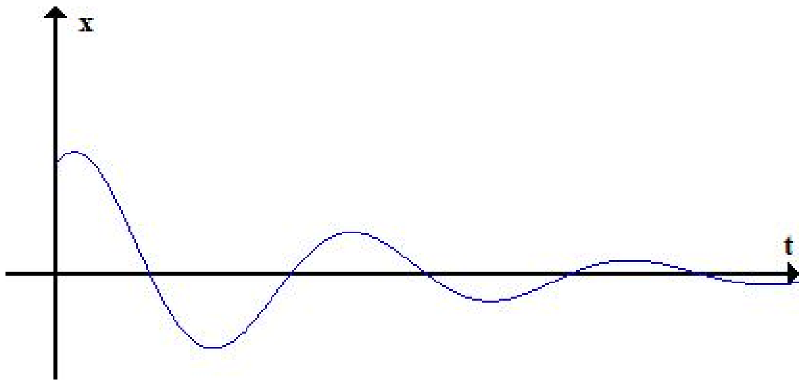
ahol $\alpha = -c/2m$ és $\beta = (\sqrt{c^2 - 4m^2\omega_0^2})/2m$.

Ha használjuk az előző részben definiált A és δ mennyiségeket ($c_1 = A\sin\delta$ és $c_2 = A\cos\delta$), ilyen alakban áll elő ez a megoldás:

$$x(t) = Ae^{-(c/2m)t}\sin\left(\frac{\sqrt{c^2 - 4m^2\omega_0^2}}{2m}t + \delta\right).$$

Itt, ha $t \to \infty$, akkor $x(t) \to 0$, de $x(t)$ végtelen sokszor átmegy az egyensúlyi ponton. Ez az alulcsillapítás.

Mindegyik esetre igaz, hogy ha már van egy minimális súrlódás is, akkor a kilengés egyre jobban csökken, és végül a rugó megáll az eredeti egyensúlyi állapotában. Az egyensúlyi helyzetbe való közeledés a kritikus csillapítás esetén a leggyorsabb.



3.1.3. Kényszerrezgés

A harmadik eset, amit megvizsgálunk, az úgynevezett **kényszerrezgés**. Ebben az esetben az egyszerűség kedvéért ismét eltekintünk a súrlódástól, viszont most hat külső erő a testre.

Ezért az egyenletünk így alakul:

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}, \tag{3.2}$$

ahol legyen $F(t) = F_0\cos\omega t$, mert a külső erő a valóságban sokszor periodikus. Például gondoljunk arra amikor egy hintát periodikusan lökünk. Legyen ω_0 a rendszer saját frekvenciája, mint ahogy eddig is, és ω legyen a kényszererő frekvenciája. Két esetet fogunk megkülönböztetni. Amikor ez a két frekvencia nem esik egybe, és amikor igen.

1. Legyen $\omega \neq \omega_0$. A homogén egyenletet már megoldottuk a harmonikus rezgőmozgásnál. Most tekintsük az inhomogén egyenletet:

$$F(t) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = e^{\lambda t}(c_1(t)\cos\beta t + c_2(t)\sin\beta t).$$

Könnyen látszik, hogy

$$\lambda = 0, \beta = \omega, a_1 = \frac{F_0}{m}, a_2 = 0, p = 0, q = w_0^2.$$

Mivel $(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 > 0$ teljesül, ezért a megoldást $x_0(t) = e^{\alpha t}(c_1(t)\cos\beta t + c_2(t)\sin\beta t)$ alakban keressük. Vagyis

$$x_0(t) = c_1 \cos\omega t + c_2(t)\sin\omega t.$$

Ekkor

$$x_0''(t) = -c_1\omega^2 \cos\omega t - c_2\omega^2 \sin\omega t.$$

Ezt behelyettesítve a (3.2) egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_0''(t) + \omega_0^2 x_0(t) &= -c_1\omega^2\cos\omega t - c_2\omega^2\sin\omega t + \omega_0^2(c_1\cos\omega t + c_2(t)\sin\omega t) \\ &= (c_1\omega_0^2 - c_1\omega^2)\cos\omega t + (c_2\omega_0^2 - c_2\omega^2)\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t. \end{aligned}$$

Ebből megkapjuk $c_1 = F_0/(m(\omega_0^2 - \omega^2))$-et és $c_2 = 0$-t, amit visszahelyettesítve $x_0(t)$-be a

$$x_0(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

megoldást kapjuk. Ebből az általános megoldás:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\cos\omega_0(t) + c_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \\ &= A\sin(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t. \end{aligned}$$

A harmonikus rezgőmozgásra rárakódik egy periodikus mozgás. Ha az ω és ω_0 eltérése nagy, akkor ez a tényező kicsi. Akkor lesz meghatározó, ha ω és ω_0 elég közel vannak egymáshoz. Ezért a következőkben megvizsgáljuk, hogy mi történik, ha ezek egyenlőek.

2. Most nézzük azt az esetet, amikor $\omega = \omega_0$. A megoldást

$$x_0(t) = t(c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t)$$

alakban keressük. Ekkor

$$x_0''(t) = (2c_2\omega_0 - tc_1\omega_0^2)\cos\omega_0 t + (-2c_1\omega_0 - tc_2\omega_0^2)\sin\omega_0 t.$$

Behelyettesítjük a (3.2) egyenletbe:

$$2c_2\omega_0\cos\omega_0 t - 2c_1\omega_0\sin\omega_0 t = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t.$$

Ebből megkapjuk, hogy $c_1 = 0$ és $c_2 = F_0/(2\omega_0 m)$, amiből $x_0(t)$-be visszahelyettesítve

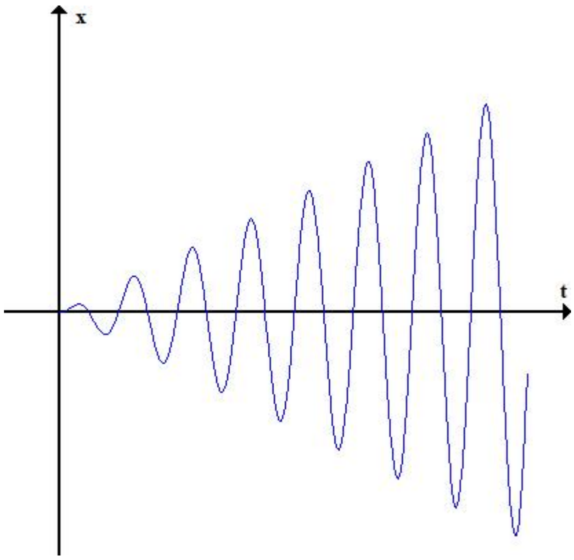
$$x_0(t) = t\frac{F_0}{2\omega_0 m}\sin\omega_0 t$$

adódik. Így az általános megoldás:

$$x(t) = c_1\cos\omega_0(t) + c_2\sin\omega_0 t + t\frac{F_0}{2\omega_0 m}\sin\omega_0 t = A\sin(\omega_0 t + \delta) + t\frac{F_0}{2\omega_0 m}\sin\omega_0 t.$$

Tehát:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \delta) + t\frac{F_0}{2\omega_0 m}\sin\omega_0 t.$$



Ez egy nem korlátos függvény, ezért a rugó előbb-utóbb elszakad, mert nem tud határtalanul nőni. Rezonanciának nevezzük ha a kényszerfrekvencia megegyezik a mozgás saját frekvenciájával. Ez katasztrófához is vezethet, mint 1940-ben a Tacoma híd esetében. A felfüggesztett híd elkezdett függőleges irányú mozgást végezni, és fél év múlva le is szakadt, ennek oka az volt, hogy az erős szél kényszerrezgést gerjesztett a híd szerkezetében. Egy másik ilyen eset Angliában történt, 1831-ben, a Broughton hídon. Katonák masíroztak át a hídon. A csapat lépése periodikus volt, és a kényszerfrekvencia éppen megegyezett a híd saját frekvenciájával, így a híd leszakadt.

4. fejezet

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Végül az

$$x'(t) = Ax(t)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszerekkel foglalkozunk, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrix és $x \in \mathbb{R}^n$ egy vektor. Ekkor a megoldás:

$$x(t) = e^{At}c,$$

ahol $e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $c \in \mathbb{R}^n$ és

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Az exponenciális függvény kiszámítása ritkán történik definíció szerint. Helyette két módszert használhatunk.

Az egyik módszernél az Hermite-féle interpolációs polinomok segítségével számoljuk ki az e^{At} mátrixot.

Az A mátrix minimálpolinomjának foka: m. Az A különböző sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, ezek multiplicitása a minimálpolinomban $m_1, m_2, \dots, m_k$. Ekkor minden t-hez létezik p_t polinom, amely legfeljebb $m-1$-ed fokú és amelyre $e^{At} = p_t(A)$. Ezek a polinomok:

$$p_t^{(i)}(\lambda_j) = t^i e^{\lambda_j t} \qquad (j = 1, 2, \dots, k; i = 0, 1, \dots, m_j - 1).$$

Vizsgáljuk meg az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$-es esetet. Itt két lehetőség van.

1. Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor a minimálpolinom foka 2 és a sajátértékek multiplicitása 1. Így $p_t(z) = a_t z + b_t$ elsőfokú polinomok, és $p_t(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t}$, $p_t(\lambda_2) = e^{\lambda_2 t}$.

2. A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ esetben, ha A diagonális mátrix, akkor a minimálpolinom elsőfokú, így $p_t(z) = e^{\lambda t}$ konstans polinom. Különben a minimálpolinom másodfokú, a sajátérték multiplicitása 2, így $p_t(z) = a_t(z)+b_t$ elsőfokú polinomok, ahol $p_t(\lambda) = e^{\lambda t}$ és $p_t'(\lambda) = te^{\lambda t}$.

A másik módszernél a mátrix Jordan-féle normálalakját használjuk.

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}APP^{-1}AP...P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}AP} &= I + P^{-1}AP + \frac{(P^{-1}AP)^2}{2!} + \frac{(P^{-1}AP)^3}{3!} + ... \\ &= I + P^{-1}AP + \frac{P^{-1}A^2P}{2!} + \frac{P^{-1}A^3P}{3!} + ... = P^{-1}e^AP \end{aligned}$$

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP \Rightarrow Pe^{P^{-1}AP}P^{-1} = e^A$$

Tegyük fel,hogy az A sajátértékei: λ_1, λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{R}$ és létezik n darab független sajátvektor: u_1, u_2, ..., u_n. Ekkor legyen $P = (u_1u_2\cdots u_n)$, így $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ és $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$.

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre sok alkalmazás van, most egy olyat nézünk meg, amely talán mindenki számára érthető, egy pár egymás iránti szeretetét fogjuk vizsgálni.

4.1. Furcsa Pár

Arnold és Boglárka egy pár, akiknek az egymás iránti szeretetük változásáról a következőt kell tudni: amikor Arnold szereti Boglárkát, akkor Boglárka elkezdi kevésbé szeretni Arnoldot. Ha viszont Arnold utálja Boglárkát, akkor Boglárka elkezdi egyre jobban szeretni Arnoldot. Arnold esetében, ha Boglárka szereti, akkor Arnold is egyre jobban szereti, ha Boglárka elkezdi nem szeretni, akkor Arnold is egyre kevésbé szereti őt. Hogyan lehetne leírni a pár szeretetének változását?

Tegyük fel, hogy $t = 0$ a találkozásuk pillanata. Az $a(t)$ és $b(t)$ függvények fejezik ki Arnold és Boglárka szeretetét egymás iránt. Ezek $t \geq 0$-ra vannak értelmezve. Az $a(t_1) > 0$ azt jelenti, hogy Arnold a t_1 időpontban szereti Boglárkát, az $a(t_2) < 0$ pedig azt, hogy a t_2 pillanatban Arnold nem szereti Boglárkát. Tegyük fel továbbá, hogy ezek a függvények differenciálhatóak.

Arnoldnak és Boglárkának az alábbiakban leírt viszonya matematikailag azt jelenti,hogy

$a'(t) = Ab(t)$, ahol $A > 0$ állandó,

$b'(t) = -Ba(t)$, ahol $B > 0$ állandó.

A $t = 0$ pillanatban $a(0) = a_0$ és $b(0) = b_0$.

Határozzuk meg az $a(t)$ és $b(t)$ függvényeket.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $A = B = 1$. Egyenletrendszerünk így a következő:

$$a'(t) = b(t),$$
$$b'(t) = -a(t).$$

Az egyenletrendszert írjuk fel mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Meghatározzuk az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A karakterisztikus egyenlet $|A - \lambda I| = 0$, azaz

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

Két különböző sajátérték van, ezért a következő egyenletrendszert kapjuk a p_t polinomjára:

$$p(z) = az + b$$
$$p(i) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$
$$p(-i) = e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$$

z helyére behelyettesítjük i-t és $-i$-t:

$$ai + b = \cos(t) + i\sin(t),$$
$$-ai + b = \cos(t) - i\sin(t).$$

Ebből ki tudjuk számolni a-t és b-t:

$$a = \sin(t), b = \cos(t).$$

a-t és b-t visszahelyettesítjük $p(z)$-be, és így a következőt kapjuk:

$$p(z) = \sin(t)z + \cos(t),$$

$$e^{At} = p(A) = \sin(t)A + \cos(t)I = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Mivel $x(t) = e^{At}C$, ahol $C \in \mathbb{R}^n$, így:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Megkapjuk $a(t)$-t és $b(t)$-t:

$$a(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t),$$
$$b(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t).$$

Az $a(0) = a_0$ és $b(0) = b_0$ kezdeti feltételekből adódóan:

$$a(0) = a_0 = c_1 \text{ és } b(0) = b_0 = c_2.$$

Ezeket behelyettesítve:

$$a(t) = a_0 \cos(t) + b_0 \sin(t),$$
$$b(t) = -a_0 \sin(t) + b_0 \cos(t).$$

Ha $a_0 = b_0 = 0$, akkor $a(t) \equiv 0$ és $b(t) \equiv 0$, azaz Arnold és Boglárka sosem éreztek egymás iránt semmit.

Tegyük fel, hogy $a_0^2 + b_0^2 > 0$. Ekkor:

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \left(\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \cos(t) + \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \sin(t) \right) =$$
$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2}(\sin(\delta)\cos(t) + \cos(\delta)\sin(t)) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin(t + \delta)$$

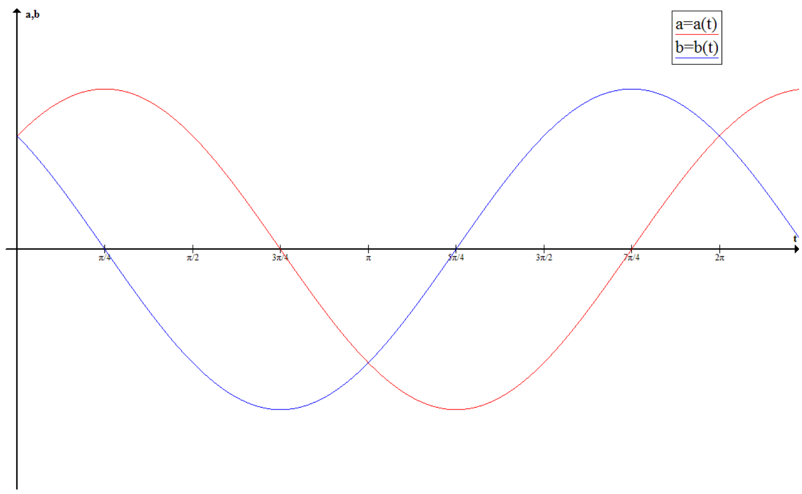
és

$$b(t) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \left(-\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \sin(t) + \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \cos(t) \right) =$$
$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2}(-\sin(\delta)\sin(t) + \cos(\delta)\cos(t)) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos(t + \delta),$$

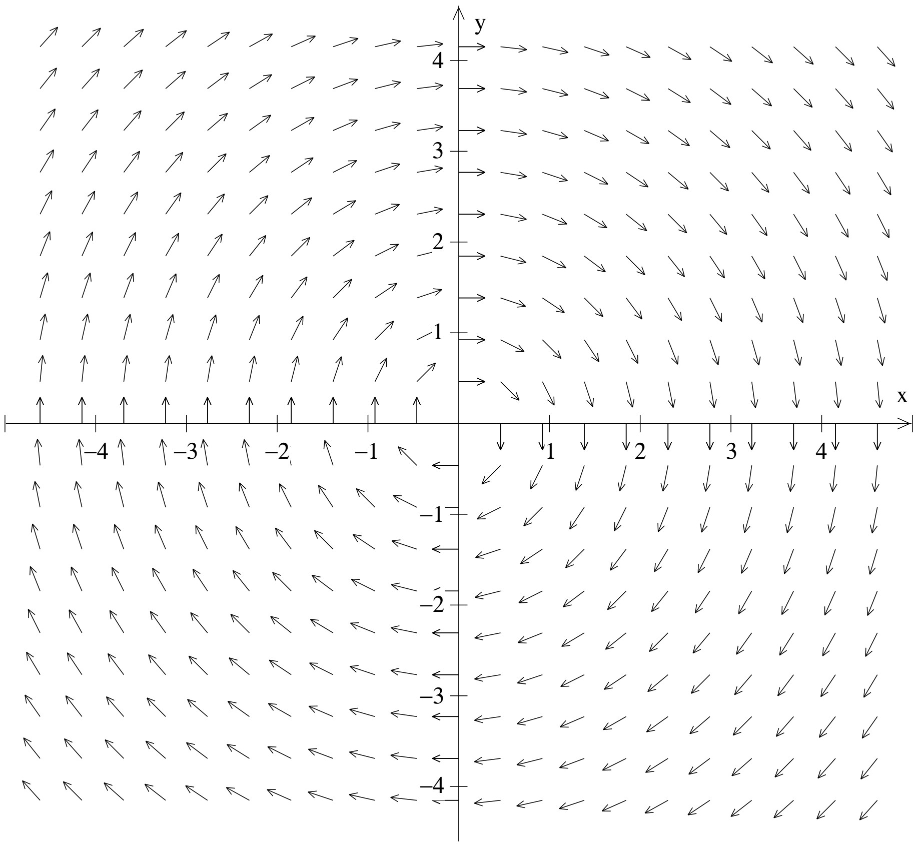
ahol δ olyan szög, melyre $\sin(\delta) = a_0/\sqrt{a_0^2 + b_0^2}$ és $\cos(\delta) = b_0/\sqrt{a_0^2 + b_0^2}$.

Nézzük azt az esetet, ahol $a_0 = b_0 = 1/\sqrt{2}$. Ebben az esetben:

$$a(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4}) \text{ és } b(t) = \cos(t + \frac{\pi}{4}).$$



A függvények 2π szerint periodikusak. Ha b pozitív, a növekszik. Ha b negatív, a csökken. A b viszont pont fordítva működik: csökken, ha a pozitív, és nő, ha a negatív. Ez a következő fázisképen is jól látszik.



Változtassuk meg egy kicsit az alaphelyzetet. Az a függvény változásának sebessége most legyen $a(t) + b(t)$, tehát Arnold szeretete gyorsabban nő, ha éppen szereti Boglárkát.

Az egyenletrendszer most a következőképpen alakul:

$$a'(t) = a(t) + b(t),$$
$$b'(t) = -a(t).$$

Az egyenletrendszert írjuk fel mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A karakterisztikus egyenlet $|A - \lambda I| = 0$:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Két különböző sajátérték van, ezért a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} p(z) &= az + b \\ p\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) &= e^{(1/2+\sqrt{3}i/2)t} = e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\ p\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) &= e^{(1/2-\sqrt{3}i/2)t} = e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - i\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \end{aligned}$$

z helyére behelyettesítjük $1/2 + \sqrt{3}i/2$-t és $1/2 - \sqrt{3}i/2$-t:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) + b &= e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), \\ a\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) + b &= e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - i\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right). \end{aligned}$$

Ebből kifejezzük b-t:

$$b = e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}t}{2} - a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right).$$

Így már ki tudjuk számolni a-t, majd b-t:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}, \\ b &= e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}. \end{aligned}$$

Ezeket $p(z)$-be visszahelyettesítve kapjuk:

$$p(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)z + e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}.$$

$$e^{At} = p(A) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)A + \left(e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)I.$$

Mivel $x(t) = e^{At}C$, ahol $C \in \mathbb{R}^n$, így:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) & \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\ -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) & \left(e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Megkapjuk $a(t)$-t és $b(t)$-t:

$$a(t) = c_1\left(e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right),$$

$$b(t) = -c_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2\left(e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

Legyen $c_2 = -c_1/2 + \sqrt{3}c_3/2$. Így a következőket kapjuk:

$$a(t) = c_1 e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + c_3 e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2},$$

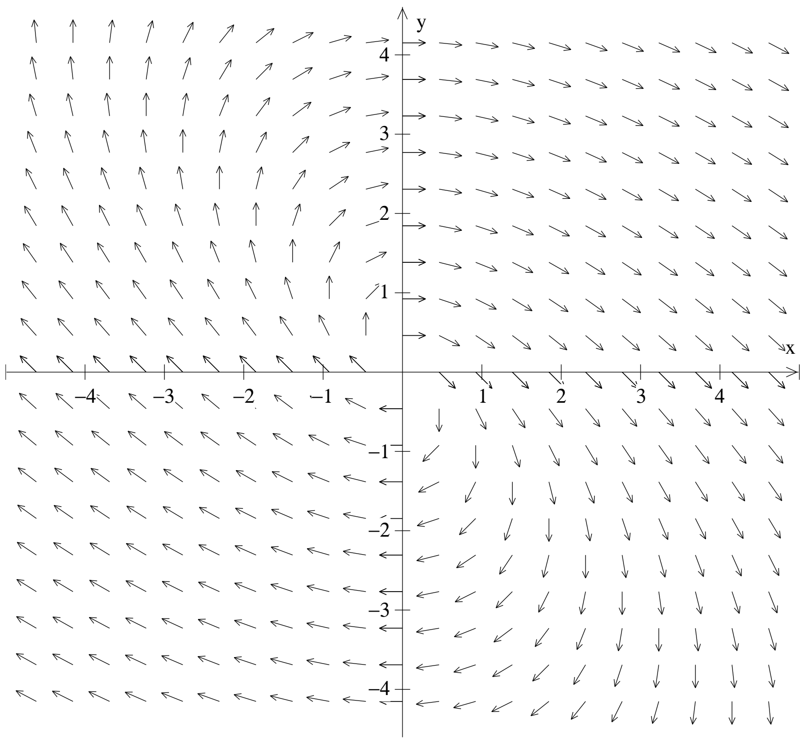
$$b(t) = \left(-\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}c_3}{2}\right)e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}c_1}{2} + \frac{c_3}{2}\right)e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}.$$

Észrevehetjük, hogy $c_1^2 + c_3^2 > 0$ esetén, az előző részhez hasonlóan:

$$a(t) = \sqrt{c_1^2 + c_3^2}\,e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \delta\right),$$

$$b(t) = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}{2}e^{t/2}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \delta\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \delta\right)\right).$$

Ez a függvény nem periodikus. A $t = 2(k\pi - \delta)/\sqrt{3}, k = 1, 2, \ldots$, pontokban nulla. Ahogy múlik az idő ($e^{t/2}$ miatt), egyre nagyobb kilengések vannak Arnold és Boglárka szerelmében, amit a fázisképen is láthatunk.



Ismét változtassuk az alaphelyzetet, és nézzük meg mi történik, ha a pár szeretetének függvénye a következő:

$$a' = 2a + b,$$
$$b' = -a.$$

Az egyenletrendszert írjuk fel mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A karakterisztikus egyenlet $|A - \lambda I| = 0$:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Mivel egy sajátértéke van, ezért a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$p(z) = az + b$$
$$p(1) = e^t$$
$$p'(1) = te^t$$

z helyére behelyettesítünk 1-et:

$$a + b = e^t, a = te^t \Rightarrow b = e^t - te^t.$$

a-t és b-t visszahelyettesítjük $p(z)$-be:

$$p(z) = te^t z + e^t - te^t,$$

$$e^{At} = p(A) = te^t A + \left(e^t - te^t\right) I = \begin{pmatrix} 2te^t + e^t - te^t & te^t \\ -te^t & e^t - te^t \end{pmatrix}.$$

Mivel $x(t) = e^{At}C$, ahol $C \in \mathbb{R}^n$, így:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^t + e^t - te^t & te^t \\ -te^t & e^t - te^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Megkapjuk $a(t)$-t és $b(t)$-t:

$$a(t) = c_1(te^t + e^t) + c_2te^t,$$
$$b(t) = -c_1te^t + c_2(e^t - te^t).$$

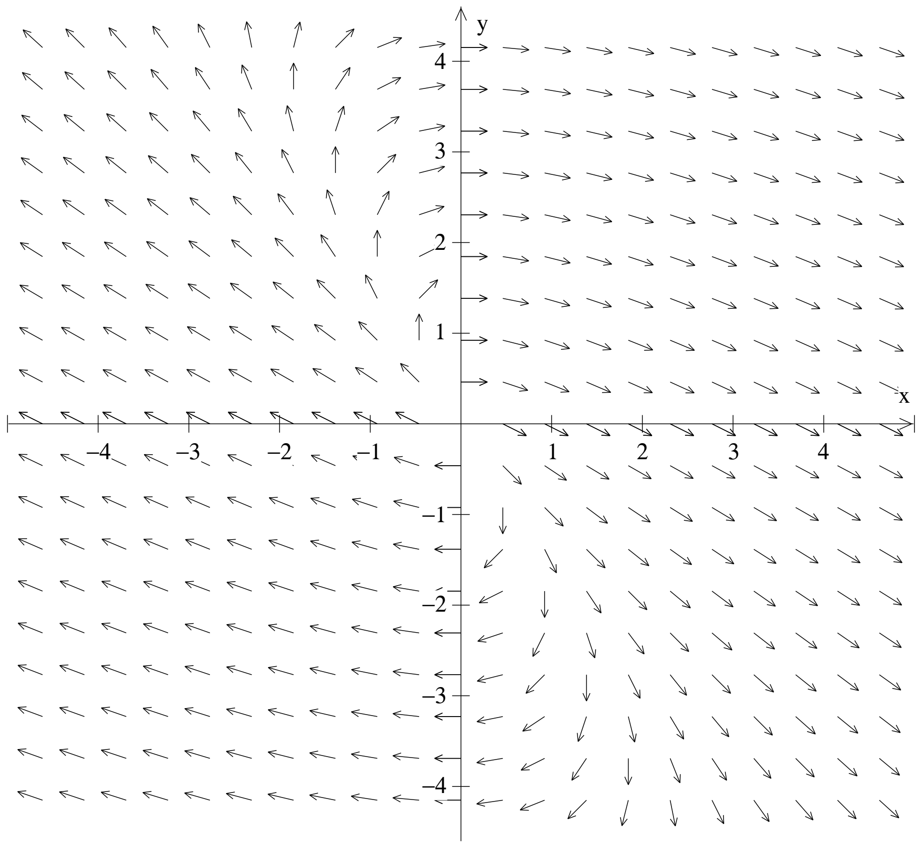
Tegyük fel, hogy $a_0 = a(0) = 1$ és $b_0 = b(0) = 1$. Ebből megtudjuk határozni c_1-t és c_2-t:

$$c_1 = 1, c_2 = 1.$$

Visszahelyettesítjük:

$$a(t) = te^t + e^t + te^t = (1 + 2t)e^t,$$
$$b(t) = -te^t + e^t - te^t = (1 - 2t)e^t.$$

Ha $t \to \infty$, akkor $a(t) \to \infty$ és $b(t) \Rightarrow -\infty$. Tehát az idő múlásával Arnold egyre jobban fogja szeretni Boglárkát, Boglárka viszont egyre kevésbé fogja Arnoldot. Itt is jól mutatja ezt a helyzetet a fázikép.



Irodalomjegyzék

[1] Hatvani László – Pintér Lajos: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában, Polygon, Szeged, 1997.

[2] K. K. Ponomarjov: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

[3] Simon Péter: Differenciálegyenletek előadásjegyzet, 2010/2011 tavaszi félév.

[4] Sikolya Eszter: Differenciálegyenletek gyakorlatjegyzet, 2010/2011 tavaszi félév.

Felhasznált programok

[5] GeoGebra 4.0

[6] Graph

[7] Winplot

[8] Paint