

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Neogrády-Kiss Borbála

**KALANDOZÁSOK A BOLZANO-TÉTEL KÖRÜL**

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Besenyei Ádám

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2015

# Tartalomjegyzék

<b>1. A Bolzano-tételhez szorosan kapcsolódó problémák</b>	<b>4</b>
1.1. A támaszegyenes és tulajdonságai . . . . .	4
1.2. Területfelezés . . . . .	9
1.3. Állítások a belefoglalásról . . . . .	14
1.4. Grafikonok vízszintes húrjai . . . . .	17
<b>2. Vektormezők</b>	<b>21</b>
2.1. Alapfogalmak . . . . .	21
2.2. Sündisznó-tétel . . . . .	25
2.3. A háromdimenziós sonkásszendvics-tétel . . . . .	27
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>30</b>

# Bevezetés

Dolgozatomban a Bolzano-tétel és a folytonosság témakörével foglalkozom. Olyan problémákat mutatok be, amelyek a középiskolában érdekes szakköri feladatok lehetnek, a matematikában jártasabb diákok szemléletesen megoldhatják.

A szakdolgozat két fő részre osztható. Az első fejezetben levő állítások szemléletesen általános iskolások körében is érthetőek. Olyan kérdésekre adunk választ, mint hogy egy (síkbeli) sonkás kenyér elfelezhető-e egy egyenes vágással, vagy a palacsintát el tudjuk-e igazságosan negyedelni két egymásra merőleges egyenes vágással. A második fejezetben sündisznókról is szó esik, valamint olyan érdekességeket bizonyítunk, mint hogy van olyan hely a Földön, ahol biztosan nem fúj a szél, továbbá létezik két olyan átellenes pont, amelyekben azonos a hőmérséklet és a nyomás is. A dolgozat a sonkásszendvics-tételben csúcsosodik ki, amely azt állítja, hogy a (térbeli) sonkás-sajtos kenyér is elfelezhető egy egyenes vágással.

# 1. fejezet

## A Bolzano-tételhez szorosan kapcsolódó problémák

Ebben a fejezetben olyan állításokat mutatunk be, melyeket szemléletesen a matematika iránt érdeklődő középiskolások is megoldhatnak. Az állításokat a dolgozatban precízebben, a Bolzano-tétel segítségével fogjuk bizonyítani.

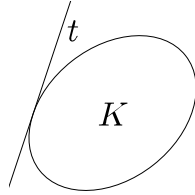
**1.1. Tétel** (Bolzano). *Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, amely negatív és pozitív értéket is felvesz, akkor létezik  $\xi \in [a, b]$ , hogy  $f(\xi) = 0$ .*

A tétel tananyag, ezért a bizonyítását nem közöljük, megtalálható többek között az [5] könyvben.

### 1.1. A támaszegyenes és tulajdonságai

Ebben a szakaszban a támaszegyenes fogalmát és tulajdonságait tárgyaljuk, mivel ezekre a későbbiekben többször szükségünk lesz. Itt a [3] jegyzetet használtuk fel. Az állításokat mindig nemüres, korlátos és zárt (röviden kompakt), síkbeli alakzatokra fogjuk kimondani (valójában megfogalmazhatók általánosabban  $\mathbb{R}^n$ -ben is, azonban nekünk csak a síkbeli változatok szükségesek).

**1.2. Definíció.** *Legyen  $K$  nemüres, kompakt alakzat a síkon. Ekkor a  $t$  egyenest a  $K$  támaszegyenesének nevezzük, ha  $K$  része a  $t$  által határolt zárt fél-síkok egyikének, és  $K \cap t$  nem üres (1.1. ábra).*



1.1. ábra.

A támaszegyenes tulajdonságainak vizsgálatához definiáljuk a támaszfüggvény fogalmát!

**1.3. Definíció.** Ha  $K$  egy  $\mathbb{R}^2$ -beli nemüres, kompakt alakzat, akkor  $K$  támaszfüggvényét a következőképpen értelmezzük:

$$h(K, x) := \max_{k \in K} \langle k, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

ahol  $\langle k, x \rangle$  a  $k$  és  $x$  vektorok euklidészi skalárszorzatát jelöli.

**Megjegyzés.** Mivel a  $\langle k, x \rangle (= k_1x_1 + k_2x_2)$  kifejezés  $k$ -nak folytonos függvénye, és  $K$  kompakt, ezért a  $k \mapsto \langle k, x \rangle$  függvénynek van maximuma  $K$ -n.

A  $h$  támaszfüggvénynek több fontos tulajdonsága is van, amelyeket az alábbiakban foglalunk össze.

#### 1.4. Állítás.

- (1) Ha  $x$  adott  $\mathbb{R}^2$ -beli vektor és  $\lambda > 0$  szám, akkor  $h(K, \lambda x) = \lambda h(K, x)$ .
- (2) Ha  $x, y$  adott  $\mathbb{R}^2$ -beli vektorok, akkor  $h(K, x + y) \leq h(K, x) + h(K, y)$ .
- (3) Az  $x \mapsto h(K, x)$  függvény folytonos  $\mathbb{R}^2$ -en.

*Bizonyítás.*

- (1) A támaszfüggvény definíciója alapján  $\lambda > 0$  esetén

$$h(K, \lambda x) = \max_{k \in K} \langle k, \lambda x \rangle = \max_{k \in K} \lambda \langle k, x \rangle = \lambda \max_{k \in K} \langle k, x \rangle = \lambda h(K, x).$$

- (2) Szintén a definíciót használva:

$$\begin{aligned} h(K, x + y) &= \max_{k \in K} \langle k, x + y \rangle = \max_{k \in K} (\langle k, x \rangle + \langle k, y \rangle) \leq \\ &\leq \max_{k \in K} \langle k, x \rangle + \max_{k \in K} \langle k, y \rangle = h(K, x) + h(K, y). \end{aligned}$$

(3) Legyen  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Ekkor

$$|\langle k, x \rangle - \langle k, x_0 \rangle| = |\langle k, x - x_0 \rangle| \leq |k| |x - x_0| < \varepsilon,$$

ha  $|x - x_0| < \varepsilon / \max_{k \in K} |k|$ . Ennélfogva, ha  $\max_{k \in K} \langle k, x_0 \rangle = \langle k_0, x_0 \rangle$  és  $\max_{k \in K} \langle k, x \rangle = \langle k_x, x \rangle$ , akkor

$$h(K, x) = \max_{k \in K} \langle k, x \rangle = \langle k_x, x \rangle < \langle k_x, x_0 \rangle + \varepsilon \leq \max_{k \in K} \langle k, x_0 \rangle + \varepsilon = h(K, x_0) + \varepsilon,$$

továbbá

$$h(K, x_0) = \max_{k \in K} \langle k, x_0 \rangle = \langle k_0, x_0 \rangle < \langle k_0, x \rangle + \varepsilon \leq \max_{k \in K} \langle k, x \rangle + \varepsilon = h(K, x) + \varepsilon,$$

vagyis

$$|h(K, x) - h(K, x_0)| < \varepsilon,$$

ha  $|x - x_0|$  elég kicsi. □

Az 1.4. állítás (1) tulajdonsága alapján célszerű a támaszfüggvényt megszorítani az  $S^1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = 1\}$  vektoraira. Rögzítsünk egy  $u \in S^1$  vektort, és tegyük fel, hogy a  $k \mapsto \langle k, u \rangle$  függvény a maximumát  $k_0 \in K$ -ban veszi fel, vagyis:

$$h(K, u) = \max_{k \in K} \langle k, u \rangle = \langle k_0, u \rangle.$$

Jelölje ekkor  $t$  azt az egyenest, amelynek egyenlete

$$\langle x, u \rangle = h(K, u) = \langle k_0, u \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^2). \quad (1.1)$$

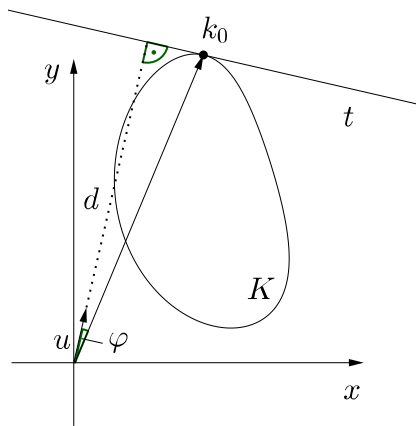
**1.5. Állítás.** *Az (1.1) egyenletű  $t$  egyenes a  $K$  nemüres, kompakt halmaz azon támaszegyenese, amelynek  $u$  a  $K$ -t tartalmazó félsíkból kifelé mutató normálvektora.*

*Bizonyítás.* Az  $x \in K$  pontok esetén  $\langle x, u \rangle \leq \langle k_0, u \rangle$ , vagyis  $\langle x - k_0, u \rangle \leq 0$ . Ez pontosan akkor következik be, ha  $x - k_0$  és  $u$  szöge legalább  $\frac{\pi}{2}$ , vagyis  $x$  abban a  $t$  által határolt félsíkban van, amelyből  $u$  kifelé mutat, tehát  $K$  része ennek a félsíknak. Ugyanakkor, mivel  $k_0 \in K \cap t$ , ezért  $K \cap t \neq \emptyset$ , így  $t$  valóban támaszegyenese  $K$ -nak. □

Az imént bizonyított állítás szerint tehát bármely  $u \in S^1$  esetén a  $K$  nem-üres, kompakt halmaznak van olyan támaszegyenes, amelynek  $u$  a  $K$ -ból kifelé mutató normálvektora. A támaszegyenes definíciója alapján világos, hogy ilyen támaszegyenes csakis egy lehet. A továbbiakban erre az egyértelmű támaszegyenesre röviden úgy hivatkozunk, mint az  $u$ -hoz tartozó támaszegyenes.

A támaszfüggvény szemléletes jelentéséről szól a következő állítás.

**1.6. Lemma.** *A  $h(K, u)$  az  $u \in S^1$  vektorhoz tartozó  $t$  támaszegyenes és az origó előjeles távolságát adja meg. Ez a távolság nemnegatív, ha az origó a  $t$  által meghatározott félsíkban helyezkedik el, mint  $K$ , különben pedig  $h(K, u)$  nempozitív.*



1.2. ábra.

*Bizonyítás.* Korábban láttuk, hogy a  $t$  egyenes egyenlete

$$\langle x, u \rangle = h(K, u) = \langle k_0, u \rangle.$$

A skalárszorzat tulajdonságai alapján

$$\langle k_0, u \rangle = |k_0| |u| \cos \varphi = |k_0| \cos \varphi,$$

ahol  $\varphi$  a  $k_0$  és az  $u$  által bezárt szög. Amennyiben az origó ugyanabban a félsíkban helyezkedik el, mint  $K$ , akkor az 1.2. ábra alapján világos, hogy  $|k_0| \cos \varphi = d$ , így  $h(K, u)$  az origó és a  $t$  támaszegyenes  $d$  távolsága. Ha az

origó és a  $K$  különböző félsíkban vannak, akkor  $h(K, u) = -d$  (hiszen  $\cos \varphi$  negatív).  $\square$

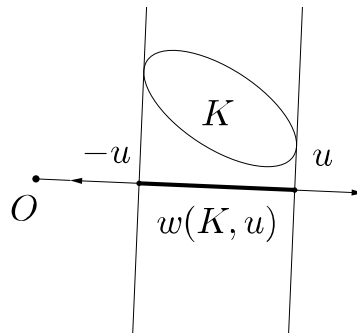
Tekintsük  $K$ -nak az  $u$ -hoz és a  $(-u)$ -hoz tartozó támaszegyeneseit! Ezek párhuzamosak, valamint  $K$  része az általuk közrefogott sávnak. Ez bármely irányú  $u$  és  $(-u)$  vektorokra teljesül, vagyis tetszőleges nemüres, kompakt halmaz belefoglalható adott egyenessel párhuzamos támaszegyenesek közötti sávba. E sáv szélessége a  $K$  alakzatnak az  $u$ -ra merőleges irányú szélessége is egyben.

**1.7. Definíció.** *Legyen  $K$  nemüres, kompakt alakzat a síkon. Ekkor  $K$  szélességfüggvényét a következőképp értelmezzük:*

$$w(K, u) := h(K, u) + h(K, -u) \quad (u \in \mathbb{R}^2, |u| = 1),$$

ahol  $h(K, u)$  az 1.3. definícióban meghatározott támaszfüggvény.

**Megjegyzés.** A szélességfüggvény szemléletesen az  $u$  és  $(-u)$  által meghatározott támaszegyenesek távolsága (1.3. ábra), hiszen az 1.6. lemma szerint  $h(K, u)$  a támaszegyenes origótól való előjeles távolsága.



1.3. ábra.

**1.8. Állítás.** *A szélességfüggvény folytonos.*

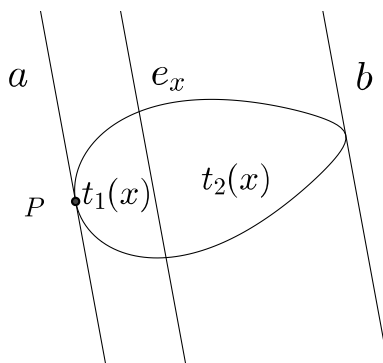
*Bizonyítás.* A szélességfüggvény folytonos függvények összege.  $\square$



## 1.2. Területfelezés

A következő állítások olyan egyenesek létezéséről szólnak, melyek felezik egy kompakt, konvex alakzat területét. A konvexitás feltevése nem szükséges, ez egyrészt biztosítja az alakzat területének (Jordan-mértékének) és kerületének létezését (erről bővebben lásd az [5] könyvet), másrészt kényelmi szempontokat szolgál a bizonyítások leírásában. Ebben a szakaszban az [1] és a [4] cikkeket használtuk.

**1.9. Állítás.** *Tetszőleges nem nulla  $v$  vektorra merőlegesen létezik olyan egyenes, amely adott kompakt, konvex síkbeli alakzatot két egyenlő területű részre oszt. Amennyiben az alakzatnak van belső pontja, pontosan egy ilyen egyenes létezik.*



1.4. ábra.

*Bizonyítás.* Ha a konvex alakzatnak nincs belső pontja, akkor területe 0, vagyis tetszőlegesen megadható  $v$ -re merőleges területfelező egyenes. Tegyük fel, hogy az alakzatnak van belső pontja, és tekintsük az 1.4. ábrát! Ezen  $a$  és  $b$  a  $v$ -re merőleges támaszegyenesek,  $P$  az alakzat és az  $a$  egyenes egy közös pontja. Jelölje  $P$  és  $b$  távolságát  $d$ , és definiáljuk a  $t_1 : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$  és a  $t_2 : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket a következőképpen! Ha minden  $x \in [0, d]$  esetén  $e_x$  jelöli az  $a$  és  $b$  által meghatározott sávban az  $a$ -tól  $x$  távolságra lévő  $a$ -val párhuzamos egyenest, akkor  $x \in [0, d]$  esetén  $t_1(x)$  legyen az alakzat  $a$  és  $e_x$  közötti,  $t_2(x)$  pedig az  $e_x$  és  $b$  közötti szeletének területe.

Megmutatjuk, hogy a  $t_1$  és  $t_2$  függvények folytonosak (elég belátni, hogy  $t_1$  folytonos, hiszen ebből következik  $t_2$  folytonossága is). A  $t_1$  függvény folytonos az  $x_0$  pontban, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta > 0$ , hogy ha  $x \in B(x_0, \delta)$ , akkor  $t_1(x) \in B(t_1(x_0), \varepsilon)$ , vagyis ha  $|x - x_0| < \delta$ , akkor  $|t_1(x) - t_1(x_0)| < \varepsilon$ . A korlátosság alapján létezik olyan  $R$ , hogy az alakzat része egy  $R$  sugarú körlapnak. Emiatt bármely  $x, x_0 \in [0, d]$  esetén a  $t_1(x)$  és  $t_1(x_0)$  területek legfeljebb egy olyan téglalap területével térhetnek el egymástól, amelyek oldalai  $2R$  és  $|x - x_0|$  hosszúságúak. Pontosabban,

$$|t_1(x) - t_1(x_0)| < 2R |x - x_0| < 2R\delta < \varepsilon,$$

ha  $\delta < \frac{\varepsilon}{2R}$ , vagyis  $t_1$  (és  $t_2$ ) valóban folytonos.

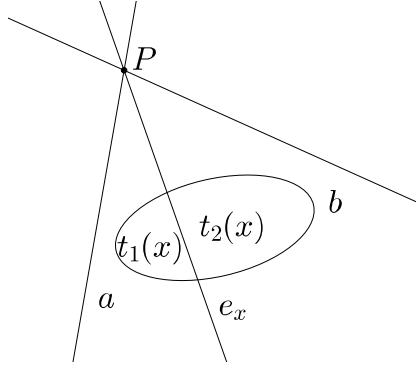
Legyen  $x \in [0, d]$  esetén  $T(x) = t_1(x) - t_2(x)$ . Ekkor  $T$  folytonos, hiszen folytonos függvények különbsége. Mivel  $T(0) < 0$ ,  $T(d) > 0$ , ezért alkalmazva a Bolzano-tételt azt kapjuk, hogy létezik  $x' \in (0, d)$ , hogy  $T(x') = 0$ , vagyis  $t_1(x') = t_2(x')$ , tehát  $e_{x'}$  felezi az alakzat területét.

Már csak az egyértelműséget kell belátnunk. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy létezik két, az alakzat területét felező,  $v$ -re merőleges egyenes. Ekkor az alakzatnak a két egyenes közé eső szelete 0 területű. Ha lenne az alakzat ezen részének három nem kollineáris pontja, akkor a konvexitás miatt ez a terület nem lehetne 0. A két egyenes által közrefogott rész tehát egy szakasz. Azonban szintén a konvexitás miatt ez azt jelenti, hogy az alakzat szüségképpen egy szakasz, amelynek viszont nincs belső pontja.  $\square$

**Megjegyzés.** A bizonyításban nem szükséges, hogy  $a$  és  $b$  támaszegyenesek legyenek, elég, ha az alakzat a két egyenes közötti sávban helyezkedik el.

**1.10. Állítás.** *Tetszőleges kompakt, konvex síkbeli alakzat esetén bármely az alakzaton, kívüli ponton keresztül létezik olyan egyenes, amely felezi az alakzat területét.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az 1.5. ábrát! Ezen  $a$  és  $b$  az alakzatot közrefogó egyenesek. A bizonyítás az 1.9. állításéhoz hasonlóan történik, annyi módosítással, hogy az  $a$  és  $e_x$  egyenesek szögének függvényében vizsgálandó az alakzat két szeletének területe.  $\square$



1.5. ábra.

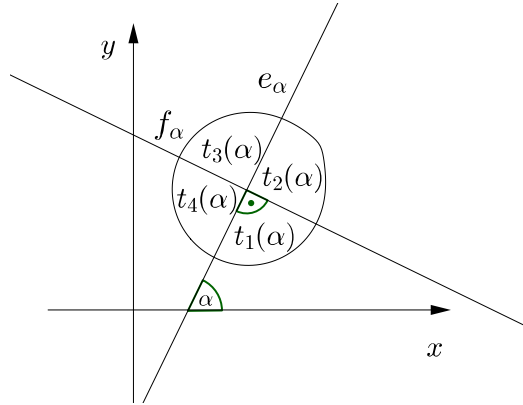
**1.11. Állítás.** Minden kompakt, konvex síkbeli alakzathoz létezik két egymásra merőleges egyenes, amelyek az alakzatot négy egyenlő területű részre osztják.

*Bizonyítás.* Ha az alakzat területe 0, tetszőlegesen megadható ilyen egyenes-pár. Különben minden  $\alpha \in [0, \pi]$  esetén legyenek  $e_\alpha$  és  $f_\alpha$  egymásra merőleges, az alakzat területét felező egyenesek, ahol az  $e_\alpha$  és az  $x$  tengely által bezárt szög  $\alpha$ . Ilyen egyenesek az 1.9. állítás szerint bármely  $\alpha$  esetén egyértelműen léteznek. Ekkor minden  $\alpha$  esetén  $t_1(\alpha)$ ,  $t_2(\alpha)$ ,  $t_3(\alpha)$  és  $t_4(\alpha)$  legyen az alakzat  $e_\alpha$  és  $f_\alpha$  által létrehozott négy szeletének területe egy rögzített sorrendben (1.6. ábra)! Mivel a  $t_1(\alpha) + t_2(\alpha)$  terület és a  $t_2(\alpha) + t_3(\alpha)$  terület is az alakzat területének fele, ezért  $t_1(\alpha) = t_3(\alpha)$ , és hasonlóan  $t_2(\alpha) = t_4(\alpha)$ . Vagyis ha találunk olyan  $\alpha'$ -t, amelyre  $t_1(\alpha') = t_2(\alpha')$ , akkor az állítást beláttuk.

Megmutatjuk, hogy  $t_1$  (és  $t_2$ ) folytonos függvény. Legyen  $\alpha_0 \in [0, \pi]$  és  $\varepsilon > 0$  adott. A korlátosság feltétele miatt létezik  $R$ , hogy az alakzat része tetszőleges pontja körüli  $R$  sugarú körlapnak. Ezért  $\alpha_0$ -t megnövelve  $\delta$ -val, a  $t_1$  terület változása kisebb, mint négy  $R$  sugarú  $\delta$  szögű körcikknek területe, azaz  $4R^2\pi\frac{\delta}{2\pi}$ , tehát

$$|t_1(\alpha) - t_1(\alpha_0)| < 4R^2\pi\frac{|\alpha - \alpha_0|}{2\pi} < 4R^2\pi\frac{2\delta}{2\pi} = 2R^2\delta < \varepsilon,$$

ha  $\delta < \frac{\varepsilon}{2R^2}$ . Legyen minden  $\alpha \in [0, \pi]$  esetén  $T(\alpha) = t_1(\alpha) - t_2(\alpha)$ . A  $T$  folytonos a  $[0, \pi]$  intervallumon, hiszen folytonos függvények különbsége. Feltehető, hogy  $t_1(0) < t_2(0)$ , vagyis  $T(0) < 0$ . Ekkor  $t_1(\frac{\pi}{2}) = t_2(0)$ , illetve  $t_2(\frac{\pi}{2}) = t_3(0) (= t_1(0))$  miatt  $t_1(\frac{\pi}{2}) > t_2(\frac{\pi}{2})$ , azaz  $T(\frac{\pi}{2}) > 0$ . Mivel  $T$  folytonos, ezért a Bolzano-tételt



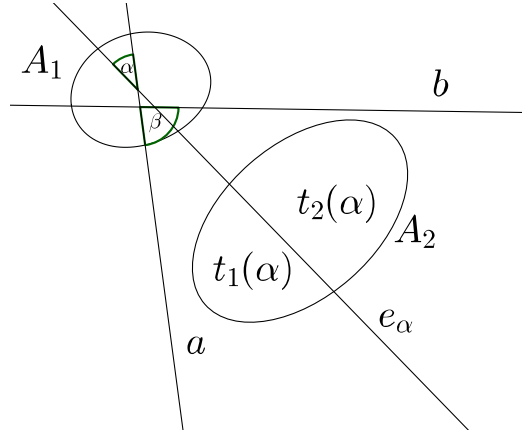
1.6. ábra.

alkalmazva kapjuk, hogy létezik  $\alpha' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , hogy  $T(\alpha') = 0$ , vagyis  $t_1(\alpha') = t_2(\alpha')$ .  $\square$

A következő állítást a kétdimenziós sonkásszendvics-tételnek is szokás nevezni, mivel a tétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy egy (konvex sonkából és konvex kenyérből álló, síkbeli) sonkás szendvicset igazságosan el tudunk felezni egy egyenes vágással.

**1.12. Állítás.** *Létezik olyan egyenes, amely egyszerre felezi két kompakt, konvex síkbeli alakzat területét.*

*Bizonyítás.* Ha mindkét alakzat 0 területű, akkor nyilvánvaló az állítás. Ha pedig az alakzatok közül csak az egyik 0 területű, akkor bármely, a nem 0 területű alakzat területét felező egyenes megfelelő. Különböztetjük az 1.7. ábrát! Jelölje a két alakzatot  $A_1$  és  $A_2$ , és legyenek  $a$  és  $b$  olyan egyenesek, amelyek két egyenlő területű részre osztják az  $A_1$  alakzatot, és az  $A_2$  alakzatot közrefogják (ilyenek az 1.9. állítás és az alakzatok korlátossága miatt vannak). Jelölje az  $a$  és  $b$  által bezárt szöget  $\beta$ . Minden  $\alpha \in [0, \beta]$  esetén  $e_\alpha$  legyen olyan egyenes, amely felezi az  $A_1$  területét, és  $a$ -val bezárt szöge  $\alpha$ . Ekkor minden  $\alpha \in [0, \beta]$ -ra legyen  $t_1(\alpha)$  az  $A_2$  alakzat  $a$  és  $e_\alpha$  közötti szeletének,  $t_2(\alpha)$  az  $A_2$  alakzat  $e_\alpha$  és  $b$  közötti szeletének területe. Belátjuk, hogy  $t_1$  (és  $t_2$ ) folytonos a  $[0, \beta]$  intervallumon. Legyen  $\alpha_0 \in [0, \beta]$  és  $\varepsilon > 0$  adott. Mivel  $A_1$  és  $A_2$  is korlátos, létezik  $R$ , hogy  $A_2$  része  $A_1$  tetszőleges pontja körüli  $R$  sugarú



1.7. ábra.

körlapnak. Emiatt

$$|t_1(\alpha) - t_1(\alpha_0)| < R^2 \pi \frac{|\alpha - \alpha_0|}{2\pi} < R^2 \pi \frac{\delta}{2\pi} = \frac{R^2 \delta}{2} < \varepsilon,$$

ha  $\delta < \frac{2\varepsilon}{R^2}$ .

Minden  $\alpha \in [0, \beta]$  esetén legyen  $T(\alpha) = t_1(\alpha) - t_2(\alpha)$ . Ekkor  $T$  folytonos, hiszen folytonos függvények különbsége. Mivel  $t_1(0) < t_2(0)$  és  $t_1(\beta) > t_2(\beta)$ , ezért  $T(0) < 0$  és  $T(\beta) > 0$ . Így a Bolzano-tétel miatt van olyan  $\alpha'$ , amelyre  $T(\alpha') = 0$ , vagyis az  $e_{\alpha'}$  egyenes felezi  $A_2$  területét is.  $\square$

**1.13. Állítás.** *Bármely kompakt, konvex síkbeli alakzathoz megadható olyan egyenes, amely egyszerre felezi az alakzat területét és kerületét is.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás fő gondolata az 1.12. állításéhoz hasonló: olyan egyeneseket forgatunk, amelyek felezik az alakzat kerületét.  $\square$

**1.14. Állítás.** *(Az 1.9. állítás háromdimenziós változata.) Tetszőleges nem-nulla  $v$  vektorra merőlegesen létezik olyan sík, amely felezi adott kompakt, konvex térbeli alakzat térfogatát.*

*Bizonyítás.* Az állítás 0 térfogatú alakzat esetén nyilvánvalóan igaz. Különböben legyenek  $A$  és  $B$  olyan  $v$ -re merőleges síkok, melyek közrefogják az alakzatot. Jelölje  $A$  és  $B$  távolságát  $d$ . Definiáljuk a  $V_1: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$  és a  $V_2: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket a következőképpen! Minden  $x \in [0, d]$ -re  $S_x$  jelölje azt a síkot, amely  $A$  és  $B$  között van, ezekkel párhuzamos, és  $A$ -tól való távolsága  $x$ .

Ekkor  $x \in [0, d]$  esetén  $V_1(x)$  legyen az alakzat  $A$  és  $S_x$  közötti,  $V_2(x)$  pedig az  $S_x$  és  $B$  közötti szeletének térfogata.

Megmutatjuk, hogy  $V_1$  (és  $V_2$ ) folytonosak. Legyen  $x_0 \in [0, d]$  és  $\varepsilon > 0$  adott. A korlátosság miatt létezik olyan  $R$ , hogy az alakzat része egy  $R$  sugarú gömbnek. Tehát bármely adott  $x_0 \in [0, d]$  esetén a  $V_1(x)$  és  $V_1(x_0)$  térfogatok eltérése legfeljebb akkora, mint egy olyan téglatest térfogata, amelynek élei  $2R$ ,  $2R$  és  $|x - x_0|$  hosszúságúak. Pontosabban

$$|V_1(x) - V_1(x_0)| < 2R \cdot 2R \cdot |x - x_0| < 4R^2 \delta < \varepsilon,$$

ha  $\delta < \frac{\varepsilon}{4R^2}$ , vagyis  $V_1$  (és  $V_2$ ) valóban folytonos. Legyen  $x \in [0, d]$ -re  $V(x) = V_1(x) - V_2(x)$ . Ekkor  $V$  folytonos, hiszen folytonos függvények különbsége. Mivel  $V(0) < 0$ ,  $V(d) > 0$ , ezért alkalmazva a Bolzano-tételt azt kapjuk, hogy létezik  $x' \in (x, d)$ , amelyre  $V(x') = 0$ , vagyis  $V_1(x') = V_2(x')$ , tehát  $S_{x'}$  felezi az alakzat térfogatát.  $\square$

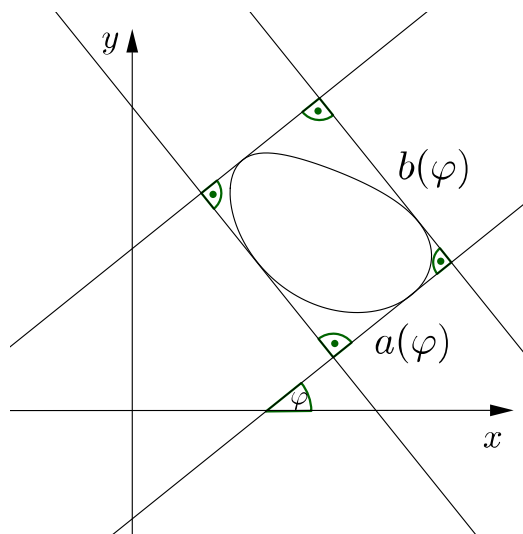
Könnyen látható, hogy az 1.12. állítás is igaz marad három dimenzióban, vagyis létezik olyan sík, amely egyszerre felezi két kompakt, konvex térbeli alakzat térfogatát. Felmerül a kérdés, hogy három alakzat esetén is van-e ilyen sík. Ezzel a kérdéssel a 2. fejezet végén foglalkozunk.

### 1.3. Állítások a belefoglalásról

Ebben a szakaszban a [2] könyvet használtuk fel. A következő állításokban arról lesz szó, hogy kompakt síkbeli alakzatok belefoglalhatók bizonyos sokszögekbe, azaz van olyan sokszög, amelynek oldalegyenesei az alakzat támaszegyenesei.

**1.15. Állítás.** *Bármely kompakt síkbeli alakzat belefoglalható egy négyzetbe, vagyis létezik olyan négyzet, amelynek minden oldalegyenese az alakzat támaszegyenese.*

*Bizonyítás.* Korábban bizonyítottuk, hogy kompakt, konvex síkbeli alakzatnak van két olyan támaszegyenese, amely adott egyenessel párhuzamos. Minden  $\varphi \in [0, \pi]$  esetén legyenek  $a_\varphi$  és  $c_\varphi$  olyan támaszegyenesei az alakzatnak,



1.8. ábra.

amelyeknek  $x$  tengellyel bezárt szöge  $\varphi$ ,  $b_\varphi$  és  $d_\varphi$  pedig legyenek az  $a_\varphi$ -re és  $c_\varphi$ -re merőleges támaszegyenesek (1.8. ábra). Ekkor  $a_\varphi$ ,  $b_\varphi$ ,  $c_\varphi$  és  $d_\varphi$  meghatároznak egy téglalapot. Jelölje a téglalap oldalainak hosszát minden  $\varphi \in [0, \pi]$  esetén  $a(\varphi)$  és  $b(\varphi)$ .

Mivel  $a$  és  $b$  valójában az 1.7. definícióban bevezetett szélességfüggvénynek felel meg (a normálvektor helyett annak szögét tekintve változóknak), így a szélességfüggvény folytonossága miatt  $a$  és  $b$  is folytonos függvények.

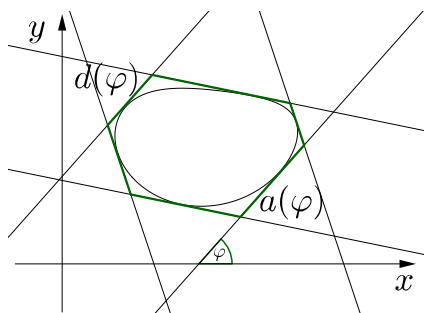
Legyen  $\varphi \in [0, \pi]$  esetén  $H(\varphi) = a(\varphi) - b(\varphi)$ . Ekkor  $H$  folytonos függvény, hiszen folytonos függvények különbsége. Feltehetjük, hogy  $a(0) < b(0)$ , vagyis  $H(0) < 0$ . Mivel  $a(\frac{\pi}{2}) = b(0)$  és  $b(\frac{\pi}{2}) = a(0)$ , ezért  $a(\frac{\pi}{2}) < b(\frac{\pi}{2})$ , vagyis  $H(\frac{\pi}{2}) > 0$ . A Bolzano-tétel miatt tehát lesz olyan  $\varphi'$ , hogy  $H(\varphi') = 0$ , azaz  $a(\varphi') = b(\varphi')$ .  $\square$

**Megjegyzés.** Ha az 1.15. állításban az alakzat nem konvex, akkor a konvex burkát belefoglalhatjuk egy négyzetbe. Mivel kompakt alakzat konvex burka a támaszegyenesei által meghatározott zárt félsíkok közös része, ezért a konvex burok minden támaszegyenesese az eredeti alakzatnak is támaszegyenesese. Vagyis a konvex burok körülírt négyzete az eredeti alakzatnak is körülírt négyzete, tehát az állítás nem konvex alakzatokra is érvényes.

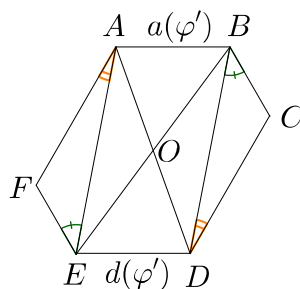
**1.16. Állítás.** *Bármely kompakt síkbeli alakzat belefoglalható olyan egyenlő szögű hatszögbe, melynek szemközti oldalai megegyező hosszúságúak.*

*Bizonyítás.* Ismét felhasználjuk, hogy kompakt síkbeli alakzatnak van két, egy adott egyenessel párhuzamos támaszegyenes. Minden  $\varphi \in [0, \pi]$  esetén legyenek  $a_\varphi$  és  $d_\varphi$  olyan támaszegyenesei az alakzatnak, amelyeknek  $x$  tengellyel bezárt szöge  $\varphi$ ,  $b_\varphi, c_\varphi, e_\varphi$  és  $f_\varphi$  pedig legyenek olyan támaszegyenesek, melyeknek az  $a_\varphi$ -vel és  $c_\varphi$ -vel bezárt szöge  $\frac{2}{3}\pi$  (1.9. ábra). Ekkor az  $a_\varphi, b_\varphi, c_\varphi, d_\varphi, e_\varphi$  és  $f_\varphi$  egyenesek meghatároznak egy egyenlő szögű hatszöget. Jelölje  $a(\varphi)$  a hatszög  $a_\varphi$ -n levő,  $d(\varphi)$  a hatszög  $d_\varphi$ -n levő oldalának hosszát.

Legyen  $\varphi \in [0, \pi]$  esetén  $H(\varphi) = a(\varphi) - d(\varphi)$ . Az  $a$  és  $d$  függvények folytonossága szemléletesen világos és a szélességfüggvény folytonosságának felhasználásával nem nehéz igazolni, de a bizonyítás inkább technikai jellegű, ezért mellőzzük. Fogadjuk tehát el, hogy  $H$  folytonos függvény. Tegyük fel, hogy  $a(0) < d(0)$ , azaz  $H(0) < 0$ . Tekintsük a  $\varphi = \pi$  szöghöz tartozó hatszög oldalait! Mivel  $a(\pi) = d(0)$  és  $d(\pi) = a(0)$ , ezért  $a(\pi) < d(\pi)$ , vagyis  $H(\pi) > 0$ . A Bolzano-tétel miatt tehát lesz olyan  $\varphi'$ , hogy  $H(\varphi') = 0$ , vagyis  $a(\varphi') = d(\varphi')$ .



1.9. ábra.



1.10. ábra.

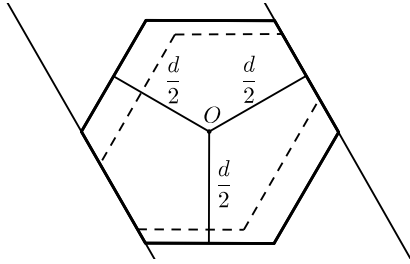
Legyen  $a(\varphi')$  a hatszög  $AB$ , és  $d(\varphi')$  a  $DE$  oldala! Ekkor az  $ABDE$  négyszög paralelogramma, így  $AE = BD$ . Ebből következik, hogy a  $BCD$  és  $EFA$  háromszögek egybevágók, mivel az 1.10. ábrán jelölt szögek váltószögek, ezért egyenlők. A hatszög tehát szimmetrikus a paralelogramma  $O$  középpontjára, vagyis szemközti oldalai egyenlők.  $\square$

**1.17. Tétel** (Pál Gyula). *Bármely  $d$  átmérőjű kompakt síkbeli alakzat lefedhető egy olyan szabályos hatszöggel, melynek oldalhossza  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .*

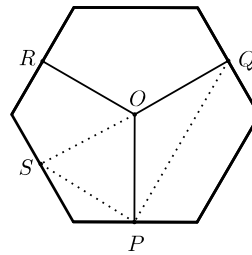
*Bizonyítás.* Az 1.16. állítás szerint az alakzat belefoglalható egy egyenlő szögű hatszögbe, melynek szemközti oldalai egyenlő hosszúak. Mivel az alakzat  $d$



átmérőjű, a hatszög szemközti oldalainak távolsága nem lehet nagyobb, mint  $d$ . Ha a hatszög nem szabályos, akkor a szemközti oldalait széthúzzhatjuk úgy, hogy az összes oldal az 1.16. állításban említett  $O$  középponttól  $\frac{d}{2}$  távolságra legyen (1.11. ábra). Így a hatszög szabályos, oldalhossza pedig éppen  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .  $\square$



1.11. ábra.



1.12. ábra.

**1.18. Tétel (Borsuk).** *Bármely  $d$  átmérőjű kompakt síkbeli alakzat felbontható három  $d$ -nél kisebb átmérőjű részre.*

*Bizonyítás.* Pál Gyula tétele szerint az alakzat lefedhető egy  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  oldalhosszú szabályos hatszöggel. Ekkor az 1.12. ábrán látható felbontást alkalmazva az alakzat három,  $d$ -nél kisebb átmérőjű részre oszlik. Ennek igazolására elég megjegyezni, hogy a  $PQS$  háromszög derékszögű, így  $PQ < QS = d$ .  $\square$

## 1.4. Grafikonok vízszintes húrjai

Ebben a szakaszban a [6] könyvet használtuk fel. Itt olyan problémákról lesz szó, amelyeket középiskolások számára az átlagsebesség – ez alatt az átlagos sebességnagyságot értjük – segítségével fogalmazhatunk meg.

Tegyük fel, hogy „differenciálható módon” utazunk  $a$  időponttól  $b$  időpontig, vagyis ha  $s(t)$  a  $t$  időpontig megtett út, akkor bármely  $t \in [a, b]$ -re létezik  $s'(t)$ . Legyen az átlagsebességünk 50 km/h, azaz  $\frac{s(b)-s(a)}{b-a} = 50$ . Ekkor a Lagrange-közéértéktétel alapján tudjuk, hogy van olyan  $c \in (a, b)$ , amelyre  $s'(c) = 50$ , vagyis van olyan időpillanat, amikor a pillanatnyi sebesség megegyezik az átlagsebességgel. Grafikonon szemléltetve ez azt jelenti, hogy az

$s(t)$  függvénynek az  $(a, b)$ -n van olyan pontja, amelyben a grafikon érintője párhuzamos a grafikon kezdő- és végpontja által meghatározott szakasszal.

Hasonlóan felmerül a kérdés, hogy van-e az út során olyan intervallum, amelyen az átlagsebesség szintén 50 km/h. Ez a kérdés geometriailag azzal egyenértékű, hogy van-e olyan húrja a függvény grafikonjának, amely párhuzamos a grafikon kezdő- és végpontját összekötő szakasszal.

Az előbbiekkal hozható kapcsolatba a következő állítás:

**1.19. Állítás.** *Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, amelyre  $f(a) = f(b)$ . Ha  $n$  tetszőleges pozitív egész, akkor a függvény grafikonjának van az  $x$ -tengellyel párhuzamos,  $\frac{b-a}{n}$  hosszú húrja.*

*Bizonyítás.* Vezessük be a  $p = b - a$  jelölést, és legyen  $g(x) = f(x) - f(x + \frac{p}{n})$ ! A bizonyítandó állítást így a következőképpen fogalmazhatjuk át: létezik  $x_0 \in [a, b - \frac{p}{n}]$ , hogy  $g(x_0) = 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(a + \frac{ip}{n}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ f\left(a + \frac{ip}{n}\right) - f\left(a + \frac{(i+1)p}{n}\right) \right] = \\ &= f(a) - f\left(a + \frac{p}{n}\right) + f\left(a + \frac{p}{n}\right) - f\left(a + \frac{2p}{n}\right) + \\ &\quad + \dots + f\left(a + \frac{(n-1)p}{n}\right) - f\left(a + \frac{np}{n}\right). \end{aligned}$$

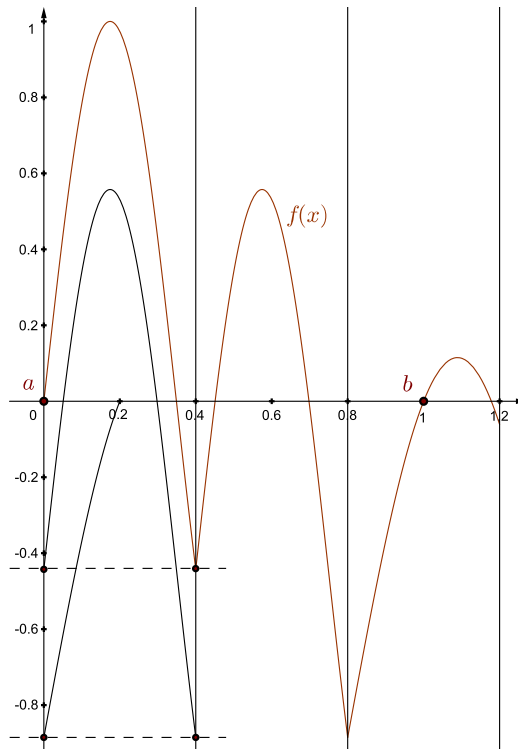
Ez egy teleszkopikus összeg, vagyis

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(a + \frac{ip}{n}\right) = f(a) - f\left(a + \frac{np}{n}\right) = f(a) - f(b) = 0.$$

Így azt kaptuk, hogy vagy minden  $i$ -re  $g(a + \frac{ip}{n}) = 0$ , vagy létezik  $i_0$ , hogy  $g(a + \frac{i_0 p}{n}) < 0$ , és létezik  $i_1$ , hogy  $g(a + \frac{i_1 p}{n}) > 0$ . Előbbi esetben az állítás bizonyított, utóbbi esetben pedig alkalmazva a Bolzano-tételt kapjuk, hogy létezik  $x_0 \in [a + \frac{i_0 p}{n}, a + \frac{i_1 p}{n}]$ , melyre  $g(x_0) = 0$ .  $\square$

**1.20. Állítás.** *Ha  $n$  nem pozitív egész, akkor az 1.19. állítás általában nem igaz: bármely  $n$  esetén létezik  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, amelyre  $f(a) = f(b)$ , de a függvény grafikonjának nincs az  $x$  tengellyel párhuzamos,  $\frac{b-a}{n}$  hosszú húrja.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $(b-a)$ -t ismét  $p!$  Legyen  $k$  az a legkisebb pozitív egész, amelyre  $\frac{kp}{n} > b$ , de  $\frac{(k-1)p}{n} < b$ . Jelöljük be ekkor az  $x$  tengelyen az  $\frac{ip}{n}$  ( $i=1, \dots, k$ ) osztópontokat. Az osztópontokban emeljünk az  $x$  tengelyre merőleges egyeneseket, ezekkel osszuk  $\frac{p}{n}$  szélességű sávokra a síknak a grafikont tartalmazó részét! Toljuk ezután egymásra a sávokat! A grafikonnak akkor van  $\frac{p}{n}$  hosszú,  $x$  tengellyel párhuzamos húrja, ha két szomszédos grafikondarab összetolva metszi egymást. Az összetolt helyzetben viszont tudunk olyan görbéket rajzolni, amelyekre ez nem következik be. Erre mutat konstrukciót az  $n = \frac{5}{2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  esetben az 1.13. ábra.  $\square$



1.13. ábra.

**Példa.** Paul Lévy francia matematikus adott általános ellenpéldát ( $a = 0$ ,  $b = 1$  esetben). Ha  $f(x) = x \sin^2(n\pi) - \sin^2(n\pi x)$ , akkor  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,

viszont

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) &= \left(x + \frac{1}{n}\right) \sin^2(n\pi) - \sin^2\left[n\pi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] - \\ &\quad - x \sin^2(n\pi) + \sin^2(n\pi x) = \frac{1}{n} \sin^2(n\pi), \end{aligned}$$

ami független  $x$ -től, és nem 0, ha  $n \notin \mathbb{Z}$ . Tehát 1 hosszú húrja van,  $\frac{1}{n}$  hosszú ( $x$  tengellyel párhuzamos) húrja viszont  $n \notin \mathbb{N}$  esetén nincs a függvény grafikonjának.

**Megjegyzés.**

- (1) Az 1.19. állítás általánosabban is igaz. Az  $AB$  szakasz két végpontját kössük össze egy folytonos görbével. Ha  $n$  pozitív egész, a görbének van olyan húrja, amely párhuzamos  $AB$ -vel, és hossza  $\frac{|AB|}{n}$ . Ennek bizonyítása azonban nem egyszerű.
- (2) Az 1.20. állítást is általánosíthatjuk: bármely nem pozitív egész  $n$ -et adunk meg, létezik olyan folytonos görbe, melynek két végpontja  $A$  és  $B$ , mégisincs olyan húrja, amely párhuzamos  $AB$ -vel, és hossza  $\frac{|AB|}{n}$ . Ennek bizonyítása az előző bizonyításhoz hasonlóan történik.

## 2. fejezet

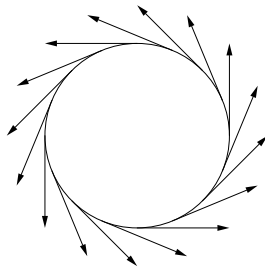
# Vektormezők

Ebben a fejezetben a [7] cikket használtuk fel. Itt folytonos leképezéseket vizsgálunk, melyekkel olyan kérdésekre kapunk választ, mint hogy lehetséges-e megfésülni a sündisznót, vagy el tudjuk-e igazságosan felezni a háromdimenziós sonkásszendvicset. Hogy ezekre a kérdésekre választ tudjunk adni, először vezessük be a szükséges fogalmakat!

### 2.1. Alapfogalmak

**2.1. Definíció.** Legyen  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Az  $A$ -n értelmezett vektormezőnek nevezünk egy  $A \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvényt.

**Példa.** Vektormező például az  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  körvonalon a  $v: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  egységnyi hosszú érintővektorokból álló mező (2.1. ábra).



2.1. ábra.

Tekintsük az  $S^1$  körvonal minden pontjában az érintővektorok  $x$  tengellyel bezárt szögét (itt  $0$  és  $2\pi$  közötti szöget értünk rajta)! Legyen a kiindulási pont az, ahol a vektor  $0$  szöget zár be az  $x$  tengellyel. Ha pozitív körüljárás szerint végigmegyünk a körvonalon, akkor a szög folytonosan nő, azonban mikor visszaérünk a kiindulási pontba, értéke  $2\pi$  lesz, vagyis az  $x$  tengellyel bezárt szög változása nem folytonos. Hasonló történhet más,  $S^1$ -en értelmezett sehol sem  $0$  vektormező esetén. Ez motiválja a következő definíciót.

**2.2. Definíció.** Legyen  $v: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vektormező. Válasszunk tetszőlegesen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontokat az  $S^1$ -en olyan sűrűn, hogy minden  $i$ -re az  $x_i$  és az  $x_{i+1}$  által meghatározott (rövidebb) ív bármely két pontjához rendelt vektorok szöge legyen kisebb, mint  $\frac{\pi}{2}$ . Ekkor a vektormező körülfordulási száma

$$k_v = \frac{\sum_{i=1}^n (v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft}{2\pi}.$$

(Itt  $x_{n+1} = x_1$ , és  $(v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft$  irányított szöget jelent.)

**Megjegyzés.** A körülfordulási számot tetszőleges sugarú körre értelmezhetjük.

**2.3. Lemma.** A körülfordulási szám nem függ az  $x_i$  pontok számától és helyzetétől (feltéve, hogy a pontok a 2.2. definícióbeli kívánalmaknak megfelelnek).

*Bizonyítás.* Először azt fogjuk igazolni, hogy a körív egy felosztásához hozzávéve egy  $x$  pontot, a körülfordulási szám nem változik.

Tegyük fel, hogy  $x$  az  $x_i$  és  $x_{i+1}$  pontok által meghatározott (rövidebb) ívre esik. Ekkor látható, hogy

$$(v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft = (v(x_i), v(x)) \triangleleft + (v(x), v(x_{i+1})) \triangleleft,$$

vagyis a körülfordulási szám nem változik.

Most megmutatjuk, hogy ha  $S$  és  $S'$  a kör két felosztása, akkor a hozzájuk tartozó körülfordulási számok megegyeznek.

Tekintsük az  $S$  felosztást, majd vegyük hozzá egyesével az  $S'$  pontjait! Ez az eljárás az előzőek miatt nem változtat a körülfordulási számon. Jelöljük az eljárás végére kapott felosztást  $S \cap S'$ -vel. Ekkor az  $S$ -hez és az  $S \cap S'$ -höz tartozó körülfordulási szám megegyezik. Hasonlóan kapjuk, hogy az  $S'$ -höz

tartozó körülfordulási szám is megegyezik az  $S \cap S'$ -höz tartozó körülfordulási számmal. Az  $S$  és  $S'$  által meghatározott körülfordulási szám tehát ugyanaz, vagyis a körülfordulási szám valóban nem függ a pontok számától és helyzetétől.  $\square$

**2.4. Lemma.** *A körülfordulási szám egész.*

*Bizonyítás.* Tekintsük egy adott  $k < n$ -re a

$$\sum_{i=1}^k (v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft$$

összeget! Ez éppen a  $(v(x_1), v(x_{k+1})) \triangleleft + 2l\pi$  szöget adja meg, ahol  $l$  valamilyen egész szám. Ezt  $k$ -ra vonatkozó indukcióval mutatjuk meg. Ha  $k = 1$ , akkor igaz az állítás. Megmutatjuk, hogy ha  $k$ -ra teljesül, akkor  $k + 1$ -re is. Világos módon

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft &= \sum_{i=1}^k (v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft + (v(x_{k+1}), v(x_{k+2})) \triangleleft = \\ &= (v(x_1), v(x_{k+1})) \triangleleft + 2l\pi + (v(x_{k+1}), v(x_{k+2})) \triangleleft. \end{aligned}$$

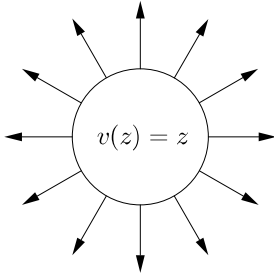
Ha most a  $v(x_k)$  és  $v(x_{k+1})$  vektorok közrefogják a  $v(x_1)$  vektort, akkor az iménti összeg  $(v(x_1), v(x_{k+1})) \triangleleft + 2m\pi$ , ahol  $m = l + 1$  vagy  $m = l - 1$  a  $(v(x_1), v(x_{k+1})) \triangleleft$  szög előjelétől függően. Ha a  $v(x_k)$  és  $v(x_{k+1})$  vektorok nem fogják közre  $v(x_1)$ -et, akkor az előbbi összeg  $(v(x_1), v(x_{k+1})) \triangleleft + 2l\pi$ .

Ebből azt kaptuk, hogy a  $\sum_{i=1}^n (v(x_i), v(x_{i+1})) \triangleleft$  összeg  $2\pi$  többszöröse, tehát a körülfordulási szám valóban egész.  $\square$

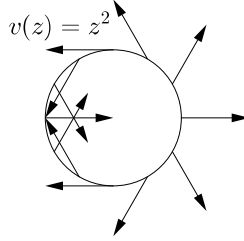
**Példa.** Képzeldük az  $S^1$  kört a komplex számsík egységkörének! Ekkor a  $v(z) = z^n$  vektormező körülfordulási száma  $n$ , hiszen  $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$  (2.2., 2.3. és 2.4. ábrák).

**2.5. Állítás.** *Legyenek a  $v_0, v_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vektormezők olyanok, hogy minden  $x \in S^1$ -re a  $v_0(x)$  és a  $v_1(x)$  vektorok által bezárt szög legfeljebb  $\frac{\pi}{2}$ ! Ekkor a két vektormező körülfordulási száma megegyezik, vagyis  $k_{v_0} = k_{v_1}$ .*

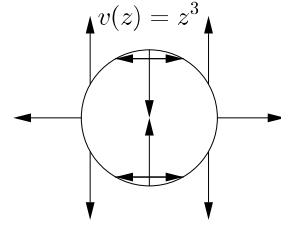
*Bizonyítás.* Legyen  $t \in [0, 1]$ , és  $v_t = tv_1 + (1 - t)v_0$ ! Ekkor  $v_t$  egy sehol sem 0 vektormező. Belátjuk, hogy  $v_t$  körülfordulási száma,  $k_{v_t}$ ,  $t$ -nek folytonos függvénye.



2.2. ábra.



2.3. ábra.



2.4. ábra.

A 2.3. lemma szerint a körülfordulási szám nem függ a köríven választott pontok számától és helyzetétől (feltéve, hogy elég sűrűn vannak választva). Tekintsünk egy adott  $n$  pontú felosztást! Megmutatjuk, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta$ , hogy egy adott  $t_0$ -ra, ha  $|t - t_0| < \delta$ , akkor a felosztás tetszőleges  $x$  pontjára a  $v_{t_0}(x)$  és a  $v_t(x)$  vektorok által bezárt szög kisebb, mint  $\frac{2\pi\varepsilon}{n}$ . Ekkor azt kapjuk, hogy

$$|k_{v_t} - k_{v_{t_0}}| = \frac{|\sum_{i=1}^n (v_t(x_i), v_t(x_{i+1})) \triangleleft - \sum_{i=1}^n (v_{t_0}(x_i), v_{t_0}(x_{i+1})) \triangleleft|}{2\pi}.$$

Ez az összeg kisebb, mint  $\frac{1}{2\pi} \cdot n \frac{2\pi\varepsilon}{n} = \varepsilon$ , tehát  $k_{v_t}$  valóban folytonos függvénye  $t$ -nek.

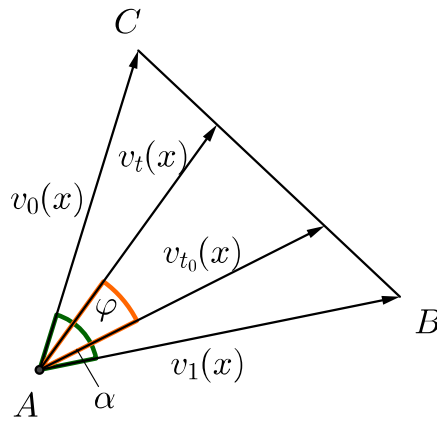
Használjuk a 2.5. ábra jelöléseit! Tekintsük egy adott  $x$  pontban a  $v_0(x)$  és a  $v_1(x)$  által meghatározott  $ABC$  háromszöget! Itt a  $v_{t_0}(x)$  és  $v_t(x)$  vektorok végpontjait összekötő szakasz hossza éppen  $|t - t_0| |v_0(x) - v_1(x)|$ . Ebből világosan látható, hogy ha  $\delta_x$  elég kicsi, akkor  $|t - t_0| < \delta_x$  esetén  $\varphi$  kisebb, mint  $\frac{2\pi\varepsilon}{n}$ . Ekkor  $\delta = \min_{k=1, \dots, n} (\delta_{x_k})$  esetén  $|k_{v_t} - k_{v_{t_0}}| < \varepsilon$ .

Ugyanakkor a körülfordulási szám minden  $t$ -re egész is, ezért konstans.  $\square$

**2.6. Állítás.** *A  $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$  körlemezen értelmezett sehol sem nulla vektormező a körlemez határán olyan vektormezőt határoz meg, melynek körülfordulási száma 0.*

*Bizonyítás.* Legyen  $k(r)$  ( $0 < r \leq 1$ ) a vektormező origó körüli  $r$  sugarú körre való megszorításának körülfordulási száma. A 2.5. állítás miatt tudjuk, hogy ha  $r$ -et kevéssel változtatjuk, akkor a körülfordulási szám nem változik. Más





2.5. ábra.

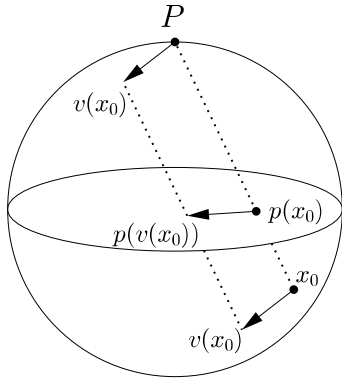
szóval a  $k$  függvény lokálisan konstans bármely  $r \in [0,1]$  pont körül, így szükségképpen konstans az egész  $[0,1]$ -en. Ugyanakkor ha  $r$  elég közel van a 0-hoz, akkor a körülfordulási szám 0, hiszen a 0-hoz elég közel a folytonosság miatt a vektormező vektorai a 0-beli értékekhez vannak közel. A körülfordulási szám tehát bármely 0 és 1 közötti  $r$ -re 0, vagyis a  $D^2$  körlemez határán is az.  $\square$

## 2.2. Sündisznó-tétel

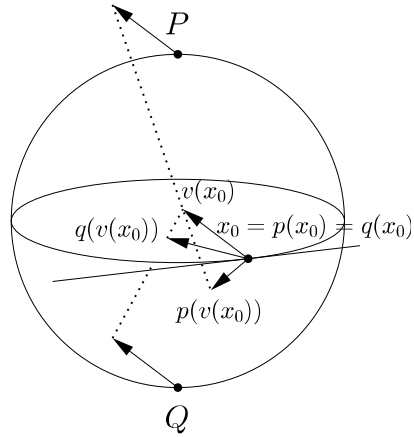
A következőkben a sündisznó megfésülhetőségére keressük a választ: rá lehet-e simítani a sündisznó testére a tüskéit úgy, hogy sehol se legyen forgója, azaz a tüskék folytonosan változzanak. Először is fogalmazzuk meg a problémát a matematika nyelvén! Jelölje az  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$  gömbfelület a sündisznó testét, a  $v: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  vektormező vektorai pedig a tüskéket. Legyen minden  $x \in S^2$ -re a belőle kiinduló  $v(x)$  az  $S^2$  gömb  $x$ -beli érintősíkjaiban. A sündisznó megfésülhető, ha létezik ilyen vektormező.

**2.7. Tétel** (Sündisznó-tétel). *Az  $S^2$  gömbfelületen nem létezik sehol sem nulla érintő vektormező, vagyis a sündisznó megfésülhetetlen.*

*Bizonyítás.* Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy  $v$  sehol sem 0 érintő vektormező. Jelölje a  $(0,0,1)$  pontot  $P$  a 2.6. ábra szerint. Vetítsük a  $P$  pontból a gömbfelület azon pontjait, melyekre  $z \leq 0$  a következőképpen: az  $x_0$  pont



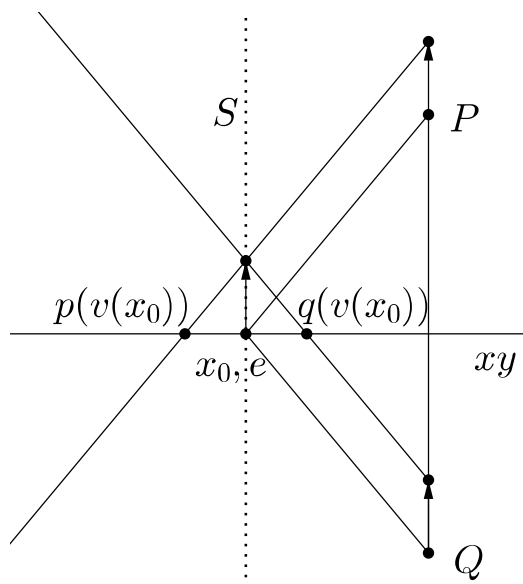
2.6. ábra.



2.7. ábra.

képe a  $Px_0$  szakasz és az  $xy$  sík metszéspontja legyen. Legyen ez a vetítés  $p$ . Az ilyen pontokhoz rendelt vektorokat pedig a következő módon vetítsük: az  $x_0 \in S^2$  pontbeli  $v(x_0)$  vektor képe az a  $p(v(x_0))$  legyen, amelynek kezdőpontja  $p(x_0)$ , végpontja pedig a  $Px_0$  félegyenes  $v(x_0)$  menti eltoltjának és az  $xy$  síknak a metszete. Ekkor  $p(x_0)$  nem lehet nullvektor. Jelölje  $Q$  a  $(0,0,-1)$  pontot a 2.7. ábra szerint. Definiáljunk a  $p$ -hez hasonlóan egy  $q$  vetítést a  $Q$  pontból az olyan  $S^2$ -beli pontokra és az azokból induló vektorokra, melyekre  $z \geq 0$ . Tekintsük az  $S^2$  és az  $xy$  sík metszetét,  $S^1$ -et! Ezen kaptunk két sehol sem nulla vektormezőt,  $p$ -t és  $q$ -t. Mindkét vektormező körülfordulási száma 0, hiszen kiterjeszthetők a  $D^2$  körlapra, vagyis alkalmazhatjuk a 2.6. állítást. Megmutatjuk, hogy az  $S^1$  alakzat  $x_0$  pontjaiban kapott  $p(x_0)$  és  $q(x_0)$  vektorok szimmetrikusak a körvonal  $x_0$ -beli  $e$  érintőjére. Tekintsük ehhez a 2.8. ábrát, amely a  $PQx_0$  háromszög síkjára való vetületet mutatja. Ekkor a  $v(x_0)$ -lal való eltolás függőleges irányú, hiszen  $v(x_0)$  érintővektor. Látható, hogy a  $p(v(x_0))$  és a  $q(v(x_0))$  végpontjainak  $S$ -től, a gömb  $x_0$ -beli érintősíkjától való távolsága megegyezik, hiszen a  $PQx_0$  háromszög egyenlő szárú. Ugyanakkor mivel  $P$ ,  $Q$  és  $x_0$  eltoltjai egy síkban vannak, ezért  $p(v(x_0))$  és  $q(v(x_0))$  szimmetrikusak az  $e$  érintőre. Belátható (a 2.5. állítás bizonyításához hasonlóan), hogy ha  $v_0, v_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vektormezők körülfordulási száma 0, és  $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vektormezőben  $u(x)$  felezi  $v_0(x)$  és  $v_1(x)$  szögét minden  $x \in S^1$ -re, akkor  $u$  körülfordulási száma is 0. Így kaptunk egy

érintővektor-mezőt, amelynek körülfordulási száma 0, vagyis ellentmondásra jutottunk.



2.8. ábra.

□

**2.8. Következmény.** *Mindig létezik a Földön olyan pont, ahol nem fúj a szél, hiszen a szél a Föld minden pontjában definiál egy folytonos érintő vektormezőt, vagyis nem lehet minden pontban nem nulla.*

Érdekeség, hogy ha a sündisznó teste nem gömb, hanem tórusz alakú, akkor már konstruálható sehol sem 0 érintő vektormező.

## 2.3. A háromdimenziós sonkásszendvics-tétel

Ebben az alfejezetben azt fogjuk bemutatni, hogy egy három testből álló háromdimenziós szendvicset el lehet felezni igazságosan. Ennek bizonyításához azonban szükségünk lesz a következő, Stanisław Marcin Ulam lengyel matematikus által megsejtett, és a szintén lengyel Karol Borsuk által bizonyított tételre.

**2.9. Tétel** (Borsuk – Ulam). Minden  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonos függvényre létezik  $x \in S^2$ , hogy  $f(x) = f(-x)$ .

A bizonyításhoz szükségünk lesz a körülfordulási szám egy általánosítására.

**2.10. Definíció.** Legyen  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkgörbe,  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nemnulla vektormező. Osszuk fel az  $[a, b]$  intervallumot az  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  osztópontokkal úgy, hogy minden  $i$ -re a  $[t_i, t_{i+1}]$  szakaszon a  $v$  vektormező bármely két vektora által bezárt szög kisebb, mint  $\frac{\pi}{2}$ ! Ekkor  $v$  vektormező  $\gamma$  menti elfordulásán a következő szöget értjük:

$$I_\gamma(v) = \sum_{i=1}^{n-1} (v(t_i), v(t_{i+1})) \triangleleft.$$

**Megjegyzés.** Ha  $\gamma$  zárt, akkor  $I_\gamma(v)$  a 2.2. definíció szerinti körülfordulási szám  $2\pi$ -szerese.

*Bizonyítás.* Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy  $f$  olyan függvény, amelyre nincs olyan  $x \in S^2$ , hogy  $f(x) = f(-x)$ . Legyen  $x \in S^2$  esetén

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Ekkor a  $g: S^2 \rightarrow S^1$  függvény olyan, hogy minden  $x \in S^2$  esetén  $g(-x) = -g(x)$ . Nevezzük az ilyen leképezéseket páratlannak. Belátjuk, hogy ilyen  $g$  nem létezik.

A  $g$  függvényt az  $S^1$ -re megszorítva egy  $v: S^1 \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vektormezőt kapunk, amely változatlanul páratlan. Megmutatjuk, hogy egy páratlan vektormező körülfordulási száma páratlan. Legyen  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  a körvonal paraméterezése. Ekkor bármely  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ -re  $\gamma(-t)$  és  $\gamma(t + \frac{1}{2})$  megegyeznek (hiszen  $\gamma(t)$  és  $\gamma(t + \frac{1}{2})$  átellenesek  $S^1$ -en). Mivel  $v$  páratlan vektormező a körön, ezért  $v(\gamma(t)) = -v(\gamma(t + \frac{1}{2}))$ . Legyen  $I_t$  a  $v$  elfordulása a  $\gamma([t, t + \frac{1}{2}])$  félkörön. Ekkor  $I_t$  folytonosan függ  $t$ -től. Ugyanakkor ez mindig egy  $2k\pi + \pi$  alakú szög, ahol  $k \in \mathbb{Z}$ , hiszen  $v$  páratlan. Így  $I_t$  konstans, tehát a  $v$  vektormező körülfordulási száma  $S^1$ -en

$$\frac{1}{2\pi}(I_0 + I_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2I_0 = \frac{1}{\pi} \cdot I_0 = 2k + 1.$$

Másrészt a  $v$  vektormező kiterjeszthető a  $D^2$  körlapra, tehát a 2.6. állítás szerint körülfordulási száma 0. Így valóban nem létezik ilyen  $g$ , vagyis a kiindulási feltételezéssel ellentmondásra jutottunk, tehát a 2.9. tétel bizonyított.  $\square$

**2.11. Következmény.** *A Földön minden pillanatban létezik két átellenes pont, amelyekben azonos a nyomás és a hőmérséklet is.*

A dolgozat záró tétele azért kapta a háromdimenziós sonkásszendvics-tétel nevet, mert szemléletesen azt fejezi ki, hogy egy kenyérből, sonkából és sajtból álló szendvicset igazságosan el lehet felezni egy egyenes vágással.

**2.12. Tétel** (Háromdimenziós sonkásszendvics-tétel). *Adott három kompakt, konvex térbeli alakzat,  $A$ ,  $B$  és  $C$ . Ekkor van olyan sík, amely egyszerre felezi mind a három alakzat térfogatát.*

*Bizonyítás.* Az 1.14. állítás alapján tudjuk, hogy bármely  $v$  vektorra merőlegesen létezik  $A$ -nak,  $B$ -nek és  $C$ -nek is térfogatfelező síkje. Belátható, hogy ezen síkok origótól való távolsága folytonos az irány függvényében. Adott  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $|u| = 1$  esetén jelölje az  $u$ -ra merőleges, az  $A$  térfogatát felező síknak az origótól való távolságát  $u_A$ . Ez a távolság legyen pozitív, ha a sík az origótól az  $u$  vektor irányában van, legyen negatív, ha a  $(-u)$  irányában helyezkedik el. Így  $(-u)_A = -(u_A)$ . Hasonlóan definiáljuk a  $v_B$ ,  $v_C$  függvényeket is. Legyen  $v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  az a leképezés, amelynek koordinátáira a következő teljesül:

$$v_1(u) = u_A - u_C, v_2(u) = u_B - u_C.$$

Ekkor  $v$  páratlan, hiszen

$$\begin{aligned} v(-u) &= ((-u)_A - (-u)_C, (-u)_B - (-u)_C) = \\ &= (-(u_A) - (-(u_C)), -(u_B) - (-(u_C))) = -v(u). \end{aligned}$$

A Borsuk–Ulam-tétel szerint tehát létezik olyan  $u'$ , amelyre  $v(u') = v(-u')$ . A páratlanság és a Borsuk–Ulam tétel következményeként  $v(u') = 0$ , vagyis  $u'_A - u'_C = u'_B - u'_C = 0$ , tehát  $u'_A = u'_B = u'_C$ . Ez pedig azt jelenti, hogy az  $u'$ -re merőleges  $A$ ,  $B$  és  $C$  térfogatát felező síkok egybeesnek.  $\square$

# Irodalomjegyzék

- [1] Bogdán Zoltán: Néhány kombinatorikus geometriai feladat, KöMaL, 1997/december
- [2] V. G. Boltyanszkij – I. C. Gohberg: Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- [3] D. G. Chakerian – J. R. Sangwine-Yager: Synopsis and Exercises for the Theory of Convex Sets, <https://www.math.ucdavis.edu/~deloera/TEACHING/MATH114/convexitythy.pdf>
- [4] Csonka Dorottya: Sonkás szendvics és egyéb folytonos csemegék, A matematika tanítása, XX. évfolyam, 3. szám (2012)
- [5] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I–II., TypoTEX, Budapest, 2013.
- [6] Reiman István: A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest, 1986.
- [7] Szűcs András: A sündisznó megfésülése és egyéb gyakorlati problémák Új matematikai mozaik (Hraskó András szerk.), TypoTEX, Budapest, 2002.