Nevezetes egyenlőtlenségek

Szakdolgozat

Készítette: Molnár Anikó

Témavezető: Besenyei Ádám egyetemi tanársegéd

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapszak Tanári Szakirány

2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozat megírásakor elsődleges szempont volt számomra, hogy az analízis témaköréből válasszak témát, mert az egyetemi évek alatt ez a tárgy nyerte el leginkább a tetszésemet. Ezen belül a nevezetes egyenlőtlenségeket választottam, mert középiskolai matematikatanárként képzelem el a jövőmet és ez a téma jól illeszkedik a középiskolai tananyagba, ezért a dolgozat fő vázát ez képezi. Természetesen azt is bemutatom, hogyan épül az általános iskolai tanulmányainkra az egyenlőtlenségek alkalmazása, rávilágítva ezzel a matematikaoktatás folyamatára. Másrészt pedig fontos alkalmazásként szélsőérték-feladatokat oldunk meg.

A dolgozatban helyet kaptak még olyan egyenlőtlenségek, amelyek ugyan nem képezik részét a normál oktatásnak, de megértésük nem kíván komolyabb elméleti háttértudást. Amennyiben több lenne a kerettantervben a matematika órák száma, a tanításukra is sort lehetne keríteni a gimnáziumi oktatásban, mivel a tanulóktól nem igényelnek erőn felüli tudást.

Az egyenlőtlenség definíciója

- Két mennyiség nagyságát összehasonlító állítás. Két valós szám háromféle nagyság szerinti relációban állhat: az egyik nagyobb, vagy kisebb a másiknál, vagy pedig a két szám egyenlő. Ezeket a $<$ (kisebb), $>$ (nagyobb), vagy $=$ (egyenlő) relációs jelekkel, illetve e jelek kombinációival fejezzük ki.

Egy másik megközelítésből pedig:

- Ha két szám vagy algebrai kifejezés a $>$ (nagyobb), $<$ (kisebb), $\neq$ (nem egyenlő), $\geq$(nagyobb vagy egyenlő), $\leq$ (kisebb vagy egyenlő) jelek valamelyikével van összekapcsolva, akkor azt **egyenlőtlenségnek** nevezzük.

Az egyenlőtlenségekkel a tanulók általános iskola alsó osztályában találkoznak először. Akkor még csak konkrét számokkal van ismertetve az egyenlőtlenség, például számok sorba rendezése, illetve számok közelítő helyének megkeresése a számegyenesen.A több-kevesebb fogalom szemléltetésével próbálják az alapvető összefüggéseket közérthetővé tenni a tanulók számára, és egyben bevezetni őket az egyenlőtlenségek alapjainak rejtelmeibe. Ekkor tanulják meg a kisebb, nagyobb, nem nagyobb és nem kisebb szavak matematikai megfeleltetését. Ez a későbbiek folyamán bővülni fog a legfeljebb, legalább, minimum és maximum kifejezésekkel.

Az általános iskola felsőbb osztályaiban tanulják az egyszerű elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásait.

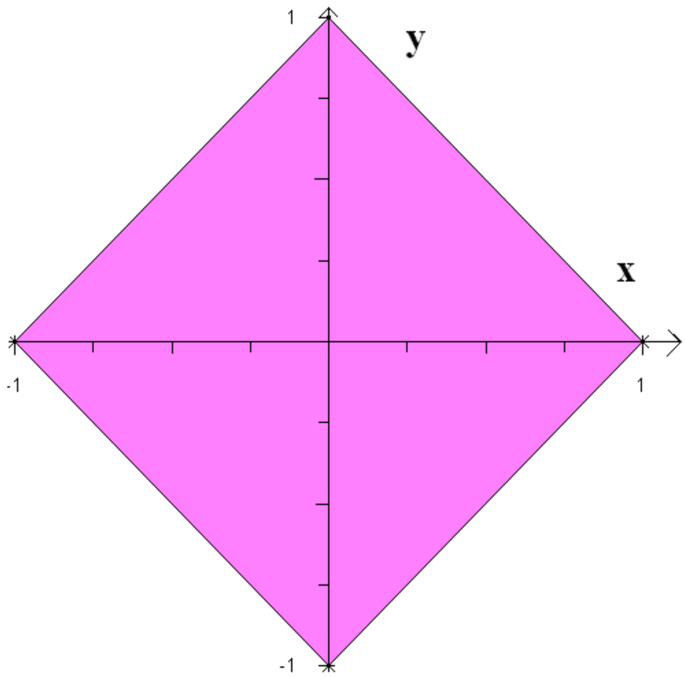
Ekkor lehet kifejleszteni a tanulók megfelelő szövegértési képességeit a szöveges egyenlőtlenségek felírásával.

A későbbiekben, azaz a 6. osztályban már találkoznak a függvényekkel és megtanulják ábrázolni is őket, viszont csak 8. osztályban érik el azt a szintet, hogy speciális ponthalmazokat ábrázoljanak a síkon. Olyan függvényekre támaszkodva, amelyekkel ezévben ismerkednek meg, mint például az abszolútérték-függvény. Az alábbi két feladatban is csak ennek a függvénynek az ismerete szükséges.

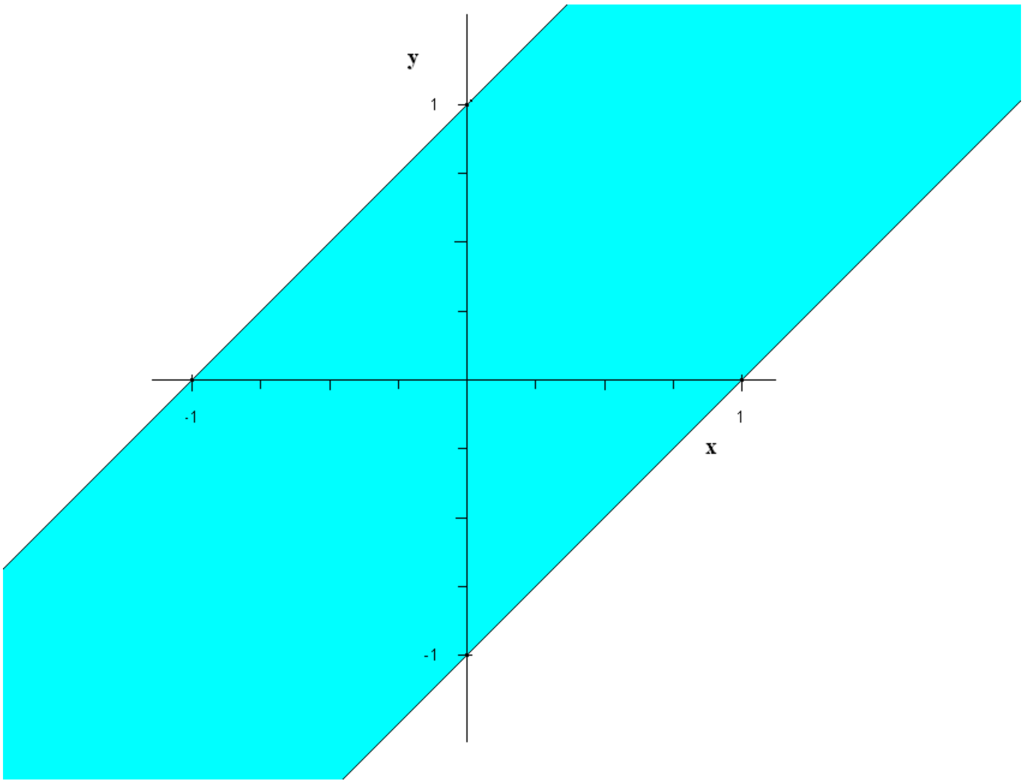
Ábrázoljuk az alábbi ponthalmazokat!

a, $|x| - |y| \leq 1$

b, $|x - y| < 1$



1. ábra



2. ábra

Más vonatkozásban is előkerülnek a relációs jelek: bizonyos geometriai alakzatok megfogalmazásához is szükségesek.

- Körlapnak nevezzük a geometriában egy sík azon pontjainak halmazát, amelyek a sík egy meghatározott pontjától adott távolságtól nem távolabb vannak.
- A körgyűrű pedig két különböző sugarú azonos középpontú körlap által határolt síkrész.

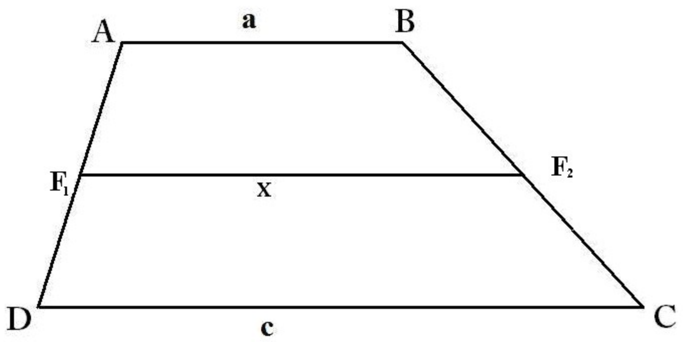
A 7-8. osztályos tananyagban megjelenik a számtani és mértani sorozat, de ekkor még csak az átlagszámításban van rutinjuk, amelyet a kerettanterv változtatásainak függvényében 5. év végén, illetve 6. osztályban tanulnak.

A gimnáziumi első osztályos anyagban kerülnek elő a nevezetes középértékek és a köztük lévő relációk. A megszokottól eltérően egy trapéz segítségével szemléltetjük a nevezetes közepeket.

Nevezetes középértékek és tételek két szám esetén

Számtani közép

Definíció: $a, b > 0$ számok számtani (más szóval aritmetikai) közepe: $A(a;b) = \dfrac{a+b}{2}$.



3. ábra

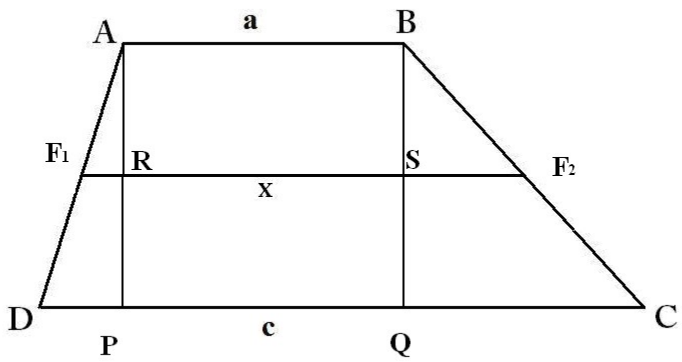
Állítás: A trapéznál a párhuzamos oldalpárok számtani közepe maga a középvonal (lásd 3. ábra):

$$x = \frac{a+c}{2}.$$

Bizonyítás:

A trapéznál (4. ábra) jelöltük azon magasságvonalakat, amelyek két derékszögű háromszöggé és egy téglalappá darabolják. Az ADP és BQC derékszögű háromszögekben, F_1R és SF_2 szakaszok hossza: $\dfrac{PD}{2}, \dfrac{QC}{2}$. Ebből egyértelműen látható:

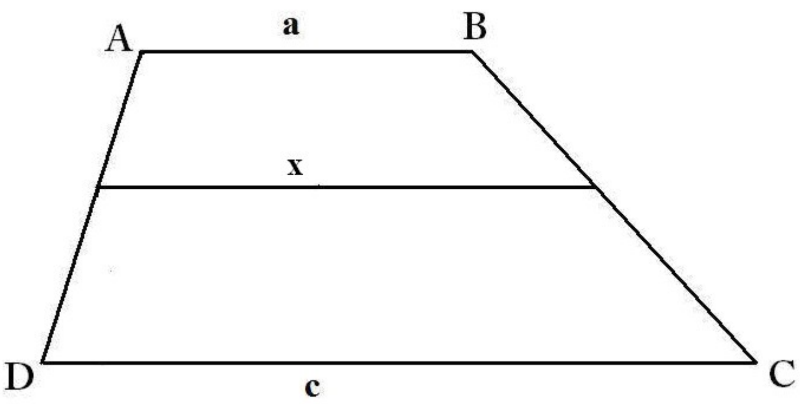
$$x = a + \frac{PD}{2} + \frac{QC}{2} = a + \frac{PD+QC}{2} = a + \frac{c-a}{2} = \frac{c+a}{2}.$$



4. ábra

Mértani közép

Definíció: $a,b > 0$ számok mértani közepe: $G(a;b) = \sqrt{a \cdot b}$.



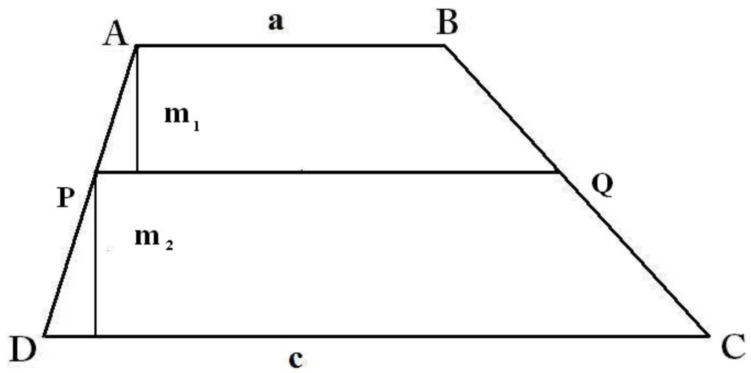
5. ábra

Állítás: A trapézban a két alap mértani közepének felel meg az a szakasz, amely párhuzamos ezekkel és két egymáshoz hasonló trapézra szeli az eredeti trapézt (lásd 5. ábra): $x = \sqrt{ac}$.

Bizonyítás:

A 6. ábrán keletkezett trapézok hasonlósága miatt:

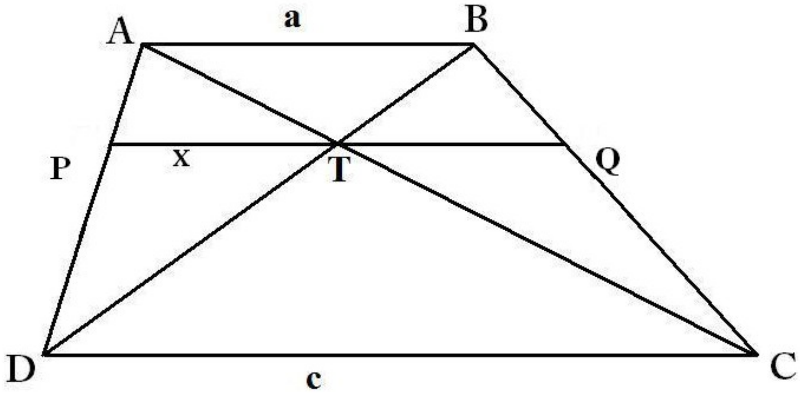
$\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$. ha ez teljesül, akkor a keletkező két trapéz, $APQB$ és $PDCQ$ hasonlóak**,** mert a szögeik megegyeznek, ezért $x = \sqrt{ac}$.



6. ábra

Harmonikus közép

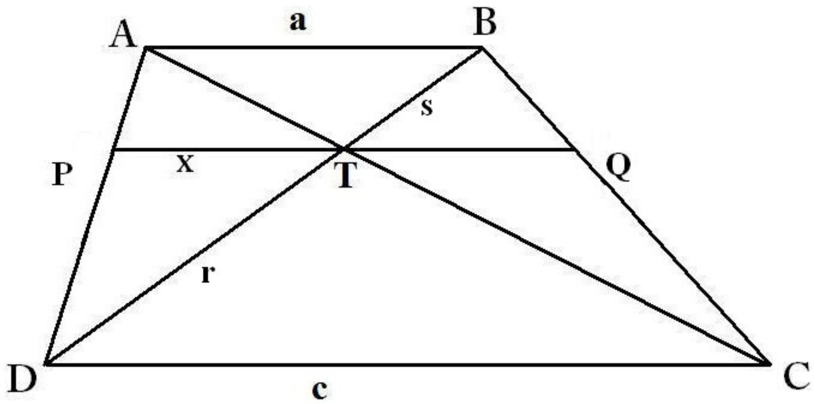
Definíció: $a,b>0$ számok harmonikus közepe: $H(a;b)=\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$.



7. ábra

Állítás: Az alapok harmonikus közepe annak a szakasznak a hossza, amely párhuzamos az alapokkal és tartalmazza az átlók metszéspontját (lásd 7. ábra): $x=\dfrac{2ac}{a+c}$.

Bizonyítás:



8. ábra

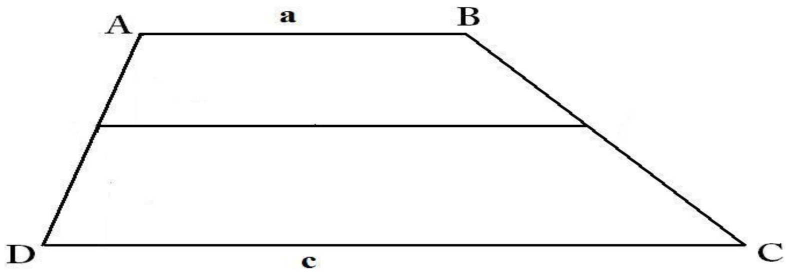
Az ATB háromszög hasonló a CTD háromszöghöz (8. ábra), ezért $\frac{a}{c}=\frac{s}{r}$, így

$$\frac{a+c}{c}=\frac{r+s}{r}.$$

Legyen $PT = y$, ekkor a párhuzamos szelőszakaszok tételéből következően az ADB háromszögben: $\frac{y}{a}=\frac{r}{r+s}=\frac{c}{a+c}$, ezért $y=\frac{ac}{a+c}$. Az ABC háromszögben is elvégezhetünk hasonló jellegű számítást, így eredményül $TQ=\frac{ac}{a+c}$. Ebből az látható, hogy T a PQ felezőpontja, és $x=\frac{2ac}{a+c}$.

Négyzetes közepek

Definíció: $a,b>0$ számok négyzetes közepe: $Q(a;b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.



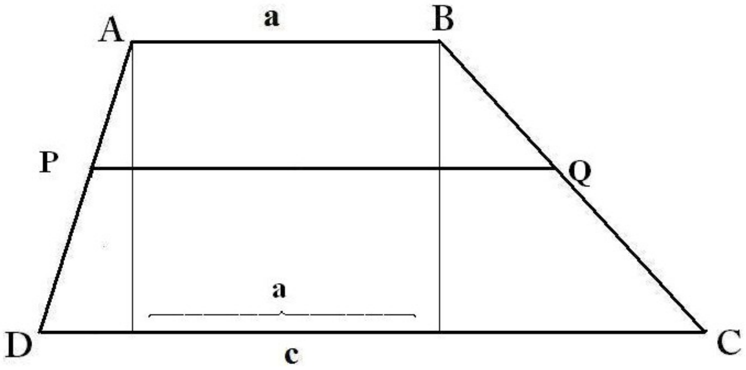
9. ábra

Állítás: Az alapok négyzetes közepének hossza megegyezik annak a szakasznak a hosszával, amely párhuzamos az alapokkal és az eredeti trapézt két egyenlő területű trapézra vágja (9. ábra).

$$x=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

Bizonyítás:

Az $ADCB$ trapézból kivágtunk egy téglalapot, melynek oldalai a (alap) és m (magasságvonal) hosszúak.



10. ábra

Az így keletkezett két derékszögű háromszöget pedig a magasságvonal mentén egymáshoz illesztjük. Az illesztés után keletkezett APQ és az ADC háromszögek hasonlóak. Az alapok

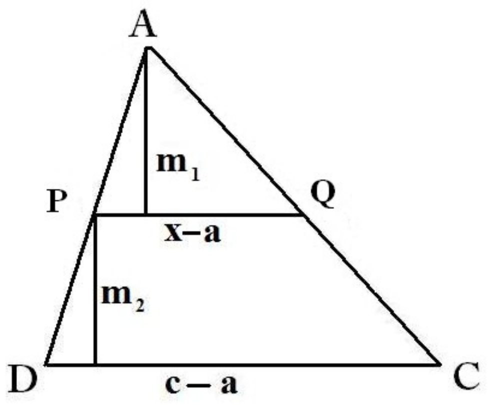
aránya $\frac{c-a}{x-a}$, ezért tudjuk, hogy a területek aránya $\frac{(c-a)^2}{(x-a)^2} = \frac{(c-a)(m_1+m_2)}{(x-a)m_1}$, vagyis:

$\frac{m_2}{m_1} + 1 = \frac{c-a}{x-a}$. Ezt átrendezve $\frac{m_2}{m_1} = \frac{c-a}{x-a} - 1 = \frac{c-x}{x-a}$ adódik a magasságok arányára. A trapézok területének arányára pedig

$$\frac{m_1\left(\frac{a+x}{2}\right)}{m_2\left(\frac{c+x}{2}\right)} = \frac{m_1}{m_2}\frac{a+x}{c+x} = \frac{x-a}{c-x}\frac{a+x}{c+x} = \frac{x^2-a^2}{c^2-x^2}.$$

Ha a két trapéz területe egyenlő, akkor $\frac{x^2-a^2}{c^2-x^2} = 1$.

Az egyenletet megoldva $x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$.



11. ábra

Állítás: A következő egyenlőtlenségek állnak fent, amennyiben *a* és *b* pozitív számok.

$$H(a;b) \le G(a;b) \le A(a;b) \le Q(a;b)$$

Megjegyzés: Egyenlőség akkor, és csakis akkor szerepel, ha a, b értéke megegyezik.

Geometriai és számtani közepek közti egyenlőtlenség

Állítás: ha $a, b > 0$ számok, akkor $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

1. Bizonyítás:

Ha két pozitív szám vagy kifejezés között fennáll egy reláció, akkor a négyzetre emelés során ennek az iránya megőrződik. Mivel a kifejezések pozitívak voltak

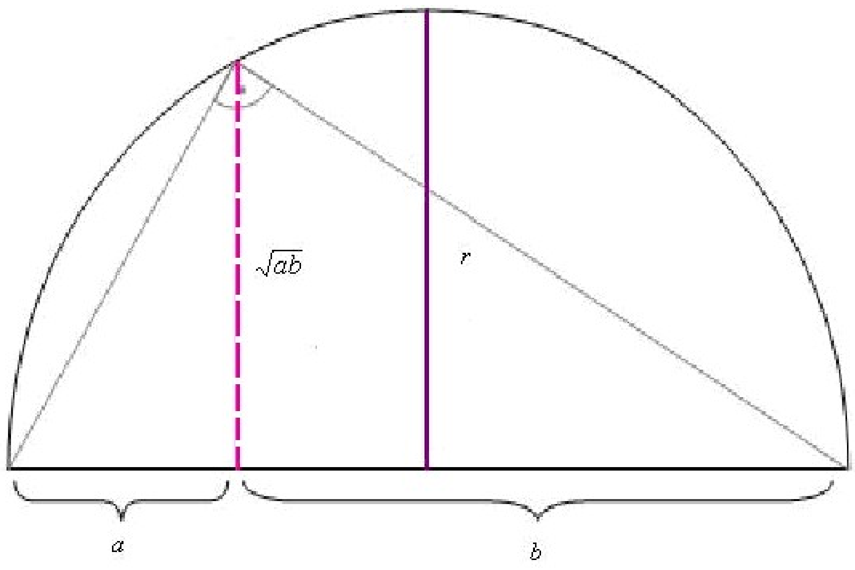
$$a \cdot b \le \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4}.$$

A fenti egyenlőtlenséget 4-el beszorozva és rendezve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$0 \le a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b = (a - b)^2.$$

Ez pedig már nyilvánvaló, mivel egy valós szám négyzete nemnegatív.

Az egyenlőtlenség szemléletes bizonyítása pedig a következő:



12. ábra

2. Bizonyítás:

Az r vonal jelöli a kör sugarát, a szaggatott vonal pedig egy olyan magasságvonal, amelyhez tartozó háromszög az adott kör átmérőjére lett írva.

Egyértelműen látszik, hogy bármelyik derékszögű háromszög esetén a magasságvonal kisebb vagy egyenlő, mint a sugár és egyenlőség csak az egyenlő szárú derékszögű háromszög esetén áll fenn. Ezt a bizonyítást a 10. évfolyamban érdemes elmondani, amikor lehet már hivatkozni a magasságtételre: a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság az átfogót két szakaszra osztja és az átfogóhoz tartozó magasság e két szakasz mértani közepe (12. ábra).

Harmonikus és geometriai közepek közti egyenlőtlenség

Állítás: ha $a,b>0$ számok akkor :

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} \le \sqrt{a \cdot b}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a = b$.

Bizonyítás:

A harmonikus közép a két szám reciprokából képzett számok számtani közepének a reciproka. Ha ismerjük a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget és tudjuk, hogy egy egyenlőtlenségnek a reciprokát véve a relációs jel megfordul, akkor az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$H(a;b)=\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}\le\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}}=\sqrt{a\cdot b}=G(a;b).$$

Számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség

Állítás: $a,b>0$ számok esetén:

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Bizonyítás:

Mivel mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelhetünk és beszorzunk néggyel

$$(a+b)^2\le 2\cdot\left(a^2+b^2\right).$$

A zárójeleket felbontva

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\le 2\cdot a^2+2\cdot b^2.$$

A továbbiakban átrendezzük az egyenletet

$$0\le a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$$

és a nevezetes azonosságok segítségével egyértelműen adódik az állítás: $0\le(a-b)^2$.

Ennek az egyenlőtlenségnek az ismeretében már meg tudunk oldani néhány speciális szélsőérték-feladatot.

Példa 3

Egy pozitív szám és reciprokának összege mindig nagyobb vagy egyenlő, mint kettő.

$$a+\frac{1}{a}\ge 2 \qquad (a\in R^+)$$

Megoldás: A bizonyításhoz csak az a és $\frac{1}{a}$ számok számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséget kell felhasználnunk:

$$A=\frac{a+\frac{1}{a}}{2},$$

$$G=\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1.$$

Ha $A \geq G$, akkor $2A \geq 2G=2$, ami maga az állítás.

Példa 4

Adott 4cm spárga, mekkora maximális területű téglalapot tudunk belőle létrehozni?

Megoldás: Ha a kerület 4cm, akkor a két különböző oldal hosszának összege 2 cm. A rövidebbik oldal legyen x hosszúságú, a hosszabbik $2-x$ hosszúságú. Ekkor a terület: $x(2-x)$.

Most ahelyett, hogy függvényt elemeznénk, a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk az $a=x$ és $b=2-x$ választással:

$$\sqrt{x(2-x)} \leq \frac{x+(2-x)}{2}.$$

Mivel a jobb oldal értéke 1, ezért a $\sqrt{x(2-x)}$ kifejezés maximális értéke 1, ha $x=2-x$, ebből következik, hogy $x=1$, tehát a téglalapunk négyzet. Ekkor a minimális terület 1 cm^2.

Példa 5

Legyenek a,b,c valós pozitív számok, ekkor: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$.

Bizonyítás: Ha igaz az állítás, akkor mindkét oldal kétszeresét véve

$$\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geq 2a+2b+2c$$

adódik, és ügyesen csoportosítva a tagokat

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2a+2b+2c, \text{ végül:}$$

$$c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 2a+2b+2c.$$

Mivel az előzőekben már bebizonyítottuk, hogy egy szám és reciprokának összege legalább 2, ezért ez utóbbi egyenlőtlenség érvényes, így az eredeti is.

Ezekhez a feladatokhoz a középérték fogalmával kellett tisztában lenni, közvetlenül a tanult anyagrész után a gyakorlóórán szerepeltetni is lehet őket.

A harmonikus közép sajátosságaként megemlíthetjük az átlag és az átlagos sebesség közti különbséget. A fizikában megtanultuk az egyenes vonalú egyenletes mozgásnál az átlagsebesség fogalmát (az átlagsebesség az a sebesség, amellyel a testnek mozognia kellene ahhoz, hogy egy adott utat, egy adott idő alatt fusson be) amelynek a számértéke a sebességek harmonikus közepe. Ez egy kicsit furcsán hangzik, mert az átlag szó kapcsán elsősorban az aritmetikai középre gondolunk, de az nem ad helyes megoldást.

A köznapi előfordulását a gyakorlati életből vett kiváló példával szemléltetném:

Példa 6

Egy autós A városból B-be utazik, majd ugyanazon az úton vissza. Kocsija odafele 10km-enként, visszafele 15km-enként fogyasztott egy-egy liter benzint. Átlagosan 1 liter benzinnel mekkora utat tudott megtenni?

Megoldás:

Mivel sem az autó által megtett út, sem az ehhez szükséges idő nincs megadva, így bevezetjük az **s** paramétert az út hosszára, x-et pedig az 1liter benzinnel megtett út hosszára. Ekkor odafele $\frac{s}{10}$, míg visszafele $\frac{s}{15}$ liter benzin fogyott. Összességében: $\frac{s}{10}+\frac{s}{15}=\frac{2s}{x}$.

Alakítva az egyenletet

$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{2}{x}$, ebből $\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}$, végül $x = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 12$.

Átlagosan tehát egy liter benzinnel 12 km-t tett meg.

Több mint egy év kihagyás után újra előtérbe kerülnek a nevezetes középértékek és a hozzájuk kapcsolódó tételek, most már azonban nemcsak két pozitív szám van megengedve, hanem tetszőleges *n* darab pozitív szám. Az emeltszintű matematikaoktatás szerves részét képezik azonban a matematika tudomány speciálisabb rétegeit képviselő, a középiskolai matematikától jobban elvonatkoztatott tananyagon felüli esetek ismerete is a tanulók számára. Többek között ezekhez a részekhez tartozik a Jensen-féle egyenlőtlenség, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség és társaik, melyeket a gimnáziumi matematikaversenyeken (pl.:KÖMAL) a szervezők előszeretettel szerepeltetnek. Igénylik azt, hogy a diákok ismerjék is ezeket a tételeket, amelyek ugyan nem általánosan megkövetelt ismeretek, de azoknak, akik ezzel szeretnének majd a további életük során foglalkozni elengedhetetlen szintkövetelmény.
Mielőtt részletesen kitérnék az egyenlőtlenségek bizonyítására, elengedhetetlennek érzem a Hölder- és a Cauchy- Bunyakovszkij - Schwarz-egyenlőtlenség megemlítését.

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség

Állítás: Tetszőleges $a_1,\dots,a_i,\dots a_n$ *és* $b_1,\dots,b_j,\dots,b_n$ valós számokra fenn áll a

$$|a_1b_1+\dots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\dots+b_n^2}\ .$$

Bizonyítás: tetszőleges *i, j =1… n* esetén legyen

$$A_{i,j} = a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 - 2a_ia_jb_ib_j = \left(a_jb_j - a_ib_i\right)^2 \ge 0\ .$$

Ha az $A_{i,j}$ számokat összeadjuk minden *1≤i<j≤n*-re, akkor a következő különbséget kapjuk:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_1b_i\right)^2 = \left(a_1^2+\dots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+\dots+b_n^2\right)-\left(a_1b_1+\dots+a_nb_n\right)^2.$$

Mivel az $A_{i,j} \ge 0$,ezért az összegük is, így a fenti állításból adódik az állítás.

A középiskolából már jól ismert skaláris szorzás $\overline{a}$, $\overline{b}$ vektorok esetén a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek az a speciális esete, amikor síkban kell gondolkodnunk. A tananyagban szereplő definíciója:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\vartheta$$

Tétel:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 .$$

Eredményeként: $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\vartheta = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ -t kapjuk

Azt tudjuk, hogy $\cos\vartheta$ értéke *-1* és *+1* között változik. Mivel a vektorok hosszát úgy kapjuk meg, hogy a koordinátáik négyzetösszegéből gyököt vonunk, akkor a négyzetre emelés során már megjelennek a kívánt kifejezések. Mindkét oldalon pozitív számok szerepelnek és $\cos^2\vartheta$ *-ről* tudjuk, hogy pozitív és legfeljebb 1 lehet, ezért igaz az alábbi becslés:

$$|a|^2 \cdot |b|^2 \geq |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \cos^2\vartheta .$$

A fentiekből kiindulva, és azt kifejtve adódik az egyenlőtlenség:

$$\left(a_1^{\,2} + a_2^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2} + b_2^{\,2}\right) \geq \left(a_1^{\,2} + a_2^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2} + b_2^{\,2}\right)\cos^2\vartheta = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 .$$

Hölder-egyenlőtlenség

Állítás: Legyenek *p és q* olyan pozitív számok, amelyekre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ *és* $b_1, \ldots, b_n$ valós számokra

$$|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt[p]{|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p} \cdot \sqrt[q]{|b_1|^q + \ldots + |b_n|^q} .$$

Megjegyzés: Azon speciális esetben amikor $p = q = 2$ a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget kapjuk.

Nevezetes középértékek és tételek több szám esetén

Számtani közép:

n darab pozitív szám számtani közepe a számok összegének és az n számnak a hányadosa:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$$

Mértani közép:

n darab pozitív szám mértani közepe a számok szorzatának n-edik gyöke:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$$

Harmonikus közép:

n darab pozitív szám harmonikus közepe a számok reciprok értékéből számított számtani közepének a reciprok értéke:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$$

Megjegyzés: Az elnevezést onnan kapta, hogy az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

harmonikus sorban a második tagtól kezdve minden tag két szomszédjának harmonikus közepe.

Négyzetes közép:

n darab pozitív szám négyzetes közepe négyzetgyöke a számok négyzetének számtani közepének:

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$$

Sok különféle ismert bizonyítás létezik a számtani és mértani középérték tétellel kapcsolatban, az alábbiakban a Riesz Frigyes-féle bizonyítást ismertetjük.

Riesz Frigyes

Tanulmányai:

Felsőfokú tanulmányait a zürichi műegyetemen, majd a budapesti egyetemen és a göttingeni egyetemen végezte.

Munkássága:

A szegedi Ferenc József Tudományegyetem Matematikai és Természettudományi Karán a Matematikai Intézetben munkálkodott, majd a Bolyai Intézet vezető professzora lett. Később Horthy Miklós Tudományegyetemen vezette a Bolyai Intézetet. A Matematikai és Természettudományi Kar dékáni tisztét töltötte be, később kinevezték rektornak is. Haláláig a budapesti tudományegyetemen tanszékvezető egyetemi tanára volt.

Matematikai munkássága:

A szegedi egyetemen a matematikai élet felvirágoztatásában tagadhatatlanul úttörő szerepe volt. E tekintetben különösen nagy jelentőségű a Haar Alfréddel közösen indított Acta Scientarum Mathematicarum című szakfolyóirat, mely a mai napig világszínvonalú a matematikai szaklapok között. Kutatásai szerteágazóak, de nagyrészt az analízis témakörébe tartoznak, mint a legismertebb eredménye is a Riesz-Fischer-tétel. A funkcióanalízis az ő munkái nyomán vált a matematika egyik fontos ágává.

Riesz Frigyes bizonyítása

Az $a_1=a_2=...=a_n$ esetben nyilvánvalóan egyenlőség teljesül, hiszen ekkor

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \, .$$

Ha a számok nem egyenlők, feltehetjük, hogy van közöttük legkisebb és legnagyobb elem, például:

$$\min(a_i) = a_1 < A_n < a_2 = \max(a_i)(1 \leq i \leq n).$$

Ebben az esetben helyettesítsük a_1 helyébe A_n-et, a_2 helyébe pedig az $a_1 + a_2 - A_n$ kifejezést. Így a számtani középérték nem változott, mivel:

$$\frac{A_n + (a_1 + a_2 - A_n) + a_3 + \dots a_n}{n} = A_n ,$$

a mértani középérték ellenben nőt (esetleg nem változott):

$$A_n(a_1 + a_2 - A_n) - a_1 a_2 = (a_1 - A_n)(A_n - a_2) \geq 0 .$$

A számok közt most már az A_n elem többször van jelen a csere miatt. Ezzel az eljárással véges sok lépésben A_n -re cseréljük az összes elemet, miközben a számtani közép ugyanaz marad, a mértani közép pedig fokozatosan nő (esetleg változatlan marad). A művelet végén elérjük a bizonyítás elején már megfogalmazott egyenlőséget, és ezzel a tételt is bizonyítottuk.

Szemléletes példák a tétel alkalmazására

Példa 7

Egy téglatest egy csúcsból kiinduló élei mérőszámának összege 45. Legfeljebb mekkora lehet a téglatest térfogata?

Megoldás: Az *abc* maximumát keressük, ha $a + b + c = 45$. Felhasználva a mértani és a számtani közép közötti összefüggést: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = 15$, azaz $abc \leq 3375$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $a = b = c = 15$, azaz ha a téglatest kocka. A maximális térfogat tehát: 3375 cm³.

Példa 8

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat felülről korlátos.

Bizonyítás:

A következő $n + 2$ db számra felírva mértani és a számtani közép közötti összefüggést:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right),\left(1+\frac{1}{n}\right),\dots,\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n},\frac{1}{2},\frac{1}{2},$$

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}.$$

A kifejezéseket rendezve:

$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4}}<1$, innen $(n+2)$-edik hatványra emelve, azután rendezve az egyenletet:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$$

adódik, és ez minden n természetes számra teljesül, azaz a sorozat felső korlátja 4.

Megjegyzés: Az ismert tétel szerint, ha egy sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens. Ezt azonban bonyolultabb belátni, sőt ha a felső korlátjának a 3-at választanánk, már akkor sokkal speciálisabb bizonyítást igényelne a feladat. A fenti sorozat határértéke éppen a nevezetes e szám.

A tétel súlyozott változata

Állítás: Ha $a_1,\ldots,a_n$ nemnegatív valós számok, $p_1,\ldots,p_n$ pozitív valós számok, amelyekre $p_1+\ldots+p_n=1$ teljesül, akkor

$$a_1^{p_1}\ldots a_n^{p_n}\leq p_1a_1+\ldots+p_na_n.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1=\ldots=a_n$. Ezt az állítást nem bizonyítjuk

Megjegyzés: Ennek $p_1=\cdots p_n=\frac{1}{n}$ speciális esete a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség tétele.

A geometriai és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség:

Állítás: $0<a_1,\ldots,a_n$ számok esetén $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$.

Bizonyítás: Legyenek $a_1,\ldots,a_n$ pozitív valós számok. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget a szintén pozitív valós $\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}$ számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\dots\frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n}.$$

A gyökvonás azonosságait alkalmazva:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\dots a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve készen is vagyunk:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\dots a_n}.$$

Az egyenlőtlenség iránya nem módosult, mivel mindkét oldalt pozitív számok állnak.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\frac{1}{a_1}=\dots=\frac{1}{a_n}$ vagyis $a_1=\dots=a_n$, hiszen ekkor a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségben egyenlőség áll fent.

A számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség

Állítás: $0<a_1,\dots,a_n$ számok esetén $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenséget az $a_1,\dots,a_n$ és a $b_1=\dots=b_i=\dots=b_n=1$ szereposztással.

Ekkor:

$$a_1+\dots+a_n \le \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}\sqrt{n},$$

$\frac{1}{n}$ - nel szorozva mindkét oldalt megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Megjegyzés: Általánosan az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok k-adik hatvány középértékének nevezzük az:

$$S_k = \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$$

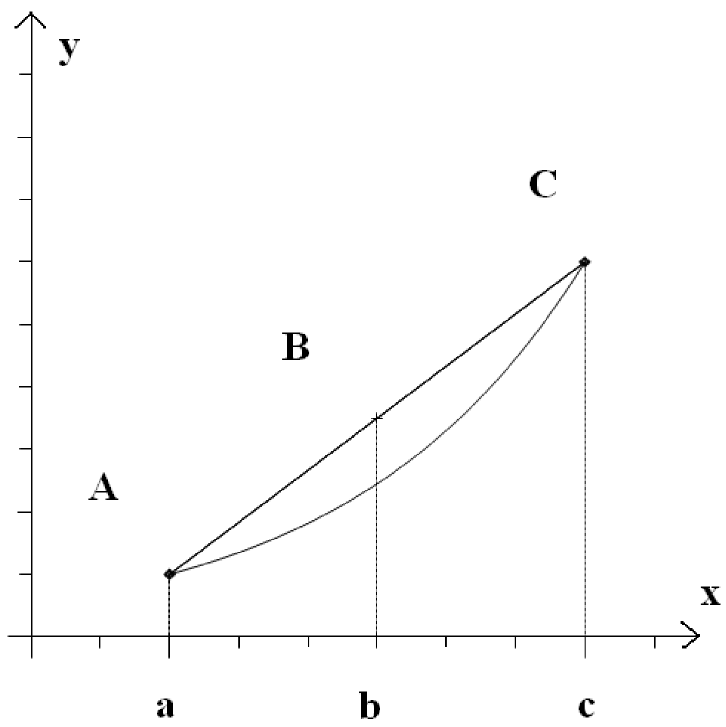
kifejezést.

Speciális esetekben már találkoztunk velük: S_1 a számtani közép, S_{-1} a harmonikus közép, S_2 pedig a négyzetes közép.

Geometriai tulajdonságok megfogalmazása az analízis eszközeivel

A konvexitás:

Amikor megismerkedünk az elemi függvényekkel, rögtön találkozunk a konvexitás fogalmával.
Definíció: A függvény bármely ívdarabja az ívet átfogó húron vagy a húr alatt fekszik. Ezt a tulajdonságot alulról konvexnek nevezzük (lásd 13. ábra). Pl.: $y = x^2$, $y = 2^x$



13. ábra

Ezzel ellentétben, ha bármely ívdarab az ívet átfogó húron vagy húr felett fekszik, akkor a függvényt alulról konkávnak nevezzük. Pl.: $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$

Abban az esetben, ha egy görbe konvex ívdarabjához konkáv ívdarab csatlakozik mint például az $y = x^3$ függvény esetében, akkor a függvény egy szakaszon alulról konvex, egy másikon pedig alulról konkáv. Más megfogalmazásban az $y = f(x)$ görbe az (a,b) intervallumban alulról konvex, ha az intervallum bármely három $x_1 < x_2 < x_3$ helyéhez tartozó $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ pontok közül $f(x_2)$ mindig az $f(x_1)f(x_3)$ húron vagy pedig alatta van. Ha a függvényt ábrázoló görbe konvex akkor a függvényt is konvexnek nevezzük. A konkávitás definíciója annyiban különbözik a konvexitás definíciójától, hogy $f(x_2)$ mindig az $f(x_1)f(x_3)$ húron vagy felette van. A függvények fent említett tulajdonságának algebrai kifejezését az alábbiak folyamán részletezzük.

Vegyünk fel az x tengelyen három különböző pontot, a -t, b *-t és* c *-t.* Ha az ac által határolt szakaszt $p : q$ arányban osztja b, akkor

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{p}{q}.$$

Ezt átrendezve $b = \dfrac{q \cdot a + p \cdot c}{p+q}$ -t kapjuk.

A $\dfrac{q}{q+p} = r$, $\dfrac{p}{q+p} = s$ behelyettesítéseket használva,

$$x = r \cdot a + s \cdot c,$$

ahol, mivel belső pontról van szó r és s pozitívak és összegük 1. A *13. ábra* alapján:

$$\frac{y - f(a)}{f(c) - y} = \frac{AB}{BC} = \frac{p}{q} = \frac{s}{r},$$

amit átrendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$y = \frac{qf(a) + pf(c)}{q+p} = rf(a) + sf(c).$$

Ennek következményeképpen megfogalmazhatjuk a konvexitást, ha az intervallumhoz tartozó *a, c* számokra és azonkívül két $r, s \in [0,1]$ számra (ezek a súlyok) fennáll a következő:

$$f(ra + sc) \le rf(a) + sf(c).$$

Az előzőekben tárgyalt egyenleteket súlyozott Jensen-féle egyenlőtlenségeknek nevezzük. Ha

$r = s = \frac{1}{2}$, akkor konvex függvényekre:

$$f\left(\frac{a+c}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(c)}{2},$$

Amelyet szimmetrikus Jensen-féle egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek a szemléltető megjelenése, hogy a görbe bármely húrjának felezőpontja a görbe feletti síkrészben található.

Egy másik megfogalmazás szerint: az *f* függvény konvex (konkáv) az I intervallumon ha minden

$a,c \in I$ és $a<x<c$ esetén $f(x) \le (\ge) h_{a,c}(x)$ ahol,

$$h_{a,c}(x) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a) + f(a)$$

a húr egyenesének egyenletét megadó lineáris függvény.

Ha >, **(<)** áll és nincs az egyenlőség megengedve, akkor a függvény az adott intervallumban szigorúan konvex, (konkáv).

A Jensen-egyenlőtlenség

A **Jensen-egyenlőtlenség** kifinomult közös kiterjesztését adja több matematikai egyenlőtlenségnek is.

Állítás: Ha egy (véges vagy végtelen) *I* intervallumon az *f* függvény konvex, $a_1,\dots,a_n \in I$, $p_1,\dots,p_n$ pozitív számok, amelyekre $p_1+\dots+p_n = 1$ teljesül, akkor

$$f(p_1a_1+\dots+p_na_n) \le p_1f(a_1)+\dots+p_nf(a_n).$$

Ha f szigorúan konvex, akkor egyenlőség csak az $a_1 = \dots = a_n$ esetben teljesül.

Ha f konkáv, akkor az állítás fordított irányú egyenlőtlenséggel teljesül.

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk.

Először az $n = 2$ esetben belátjuk az állítást, amely a konvexitásból következik:

$$f(p_1a_1+p_2a_2) \le p_1f(a_1)+p_2f(a_2).$$

Tegyük fel, hogy n-re teljesül az állítás: $f\left(p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n\right) \leq p_1 f\left(a_1\right) + \ldots + p_n f\left(a_n\right)$, és $(n+1)$-re igazoljuk az állítást. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$p = \sum_1^n p_i\,, \qquad \alpha = \sum_1^n \frac{p_i a_i}{p}\,, \qquad \beta = \sum_1^n \frac{p_i f\left(a_i\right)}{p}$$

A feltételek teljesüléséhez szükséges, hogy $\sum_1^{n+1} p_i = 1$ és minden i-re p_i >0 legyen.

Az indukciós feltevés alapján:

$$f\left(p\alpha + (1-p)a_{n+1}\right) = f\left(p_1 a_1 + \ldots + p_{n+1} a_{n+1}\right) \leq p_1 f\left(a_1\right) + \ldots + p_{n+1} f\left(a_{n+1}\right),$$

azaz
$$f\left(p\alpha + (1-p)a_{n+1}\right) \leq pf\left(\alpha\right) + (1-p) f\left(a_{n+1}\right) \leq p\beta + (1-p) f\left(a_{n+1}\right).$$

Mivel
$$p\alpha + (1-p)a_{n+1} = p_1 a_1 + \ldots + p_{n+1} a_{n+1}$$

és
$$p\beta + (1-p) f(a_{n+1}) = p_1 f(a_1) + \ldots + p_{n+1} f(a_{n+1}),$$

ezért az állítás a fentiekből már következik

Példa 9

Az $f(x) = x^2$ függvény konvex a nemnegatív valós számok halmazán, így ha $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges, $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$, akkor

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n},$$

ami a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

Példa 10

Hasonlóképpen a konkáv $f(x) = \log x$ használva azt kapjuk, hogy pozitív $a_1, \ldots, a_n$ számokra

$$\log\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\log a_1 + \ldots + \log a_n}{n} = \log\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\,.$$

Mivel a jobb oldal $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ logaritmusa, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget kapjuk a logaritmus függvény monotonitása alapján.

Példa 11

A *cos x* függvény a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra szorítkozva konkáv. Az addíciós képletekből adódóan.

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}=\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2},$$

Mivel $-\frac{\pi}{2}\le x_1\le\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le x_2\le\frac{\pi}{2}$, $x_1\ne x_2$, ezért

$$0\le\frac{|x_1+x_2|}{2}\le\frac{\pi}{2}\text{ így }0\le\cos\frac{x_1-x_2}{2}\le 1.$$

Másrészt pedig, $\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\le\cos\frac{x_1+x_2}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$

Ezzel befejezettnek tekinthetjük a bizonyítási eljárást, tehát:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

A $\cos x$ függvény konkáv mivoltából következik az a tény, hogy az intervallumból vett $x_1, x_2,...,$ x_n értékekre teljesül az n-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség:

$$\frac{\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_n}{n}\le\cos\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Az előzőekben hivatkozott feladat prototípusok megtalálhatóak a középiskolai matematika tankönyvek azon kiegészítő részében, amelyek az érdeklődő tanulók tudásvágyát hivatottak kielégíteni. Nem része szervesen a matematika tananyagnak, csupán fejlesztő szemléltető, tudásbővítő hatása miatt említik meg a normál gimnáziumi harmadikos matematika tankönyvek lapjai.

Példa 12

Minden x-re fennállnak az $|\sin x|\le|x|$ és $0\le 1-\cos x\le x^2$ egyenlőtlenségek.

Mindkét esetben elég nemnegatív x-ekre igazolni az egyenlőtlenséget a függvények paritása miatt.

Ha $\frac{\pi}{2} < x$, akkor:

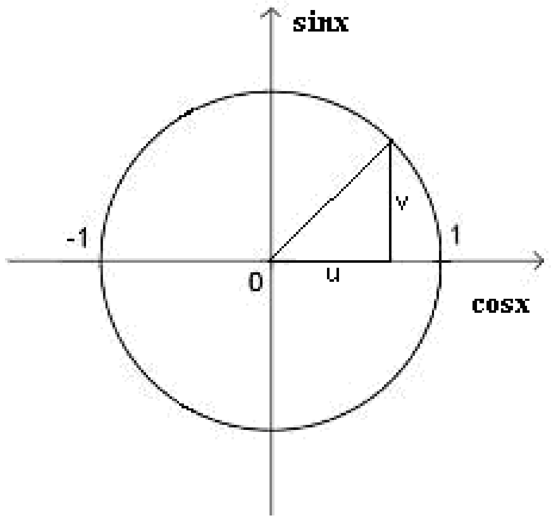
$$|\sin x| < \frac{\pi}{2} < x, \text{ illetve } 1 - \cos x \leq 2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < x^2.$$

Feltehetjük, hogy $x \leq \frac{\pi}{2}$ pozitív szám.

Az első esetben legyen $u = \cos x$ *és* $v = \sin x$, ekkor a $\cos x$ *és* $\sin x$ értelmezése miatt

$k(t) = \sqrt{1 - t^2}$ függvény grafikonjának az $[u,1]$ intervallum feletti ív hossza éppen x

(lásd a 14. ábrát).



14. ábra

Így már könnyen látható, hogy

$$0 \leq \sin x = v \leq \sqrt{(1 - u)^2 + (v - 0)^2} \leq s(k;[u,1]) = x.$$

A második esetben $\cos x \geq 0$,

$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \leq \sin^2 x \leq x^2.$$

Példa 13

Egyszerű középiskolai meggondolásokat igénylő a 2009-es októberi KÖMAL feladatsorban B jelű feladat: Az *a, b, c* oldalú, *t* területű hegyesszögű háromszögre $abc = a + b + c$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 < t \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Alkalmazva a jól ismert területképletet $2t = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ac\sin\beta$, így

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{2t}{bc} + \frac{2t}{ac} + \frac{2t}{ab} = \frac{a+b+c}{abc} \cdot 2t = 2t.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ezért:

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

alakra is hozható. Mivel hegyesszögű háromszögekről van szó $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Az $f(x)=\sin x$ függvény a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon szigorúan konkáv, a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

és az egyenlőség csakis az $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ esetben valósul meg. Az alsó becsléshez ismernünk kell a szögfüggvények összegének szorzattá alakításának menetét:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Ha rögzítjük $x+y$ értékét, akkor $\sin x + \sin y$ értéke egyenesen arányos $\cos\frac{x-y}{2}$ értékével.

A feladat feltételei szerint az α, β, γ szögek nulla és $\frac{\pi}{2}$ közé esnek, ekkor $\beta < \frac{\pi}{2}$.

Az $\alpha' = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}$ új ismeretlent bevezetve, $\gamma - \frac{\pi}{2} \leq 0$ miatt $0 < \alpha' \leq \alpha$.

Ebből következően $\alpha' + \frac{\pi}{2} = \alpha + \gamma$ és $0 \leq \gamma - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha' < \frac{\pi}{2}$, ahonnan a $\cos x$ függvény monotonitása alapján a következő összefüggés adódik:

$$\sin\alpha + \sin\gamma \geq \sin\alpha' + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\alpha' + 1.$$

Tudván azt, hogy $0 < \alpha' < \beta < \frac{\pi}{2}$ és $\alpha' + \beta = \frac{\pi}{2}$, az előzőhöz hasonló módon kapjuk, hogy

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \sin\alpha' + \sin\beta + 1 > \sin 0 + \sin\frac{\pi}{2} + 1 = 2.$$

Ennek alapján a feladatban megadott alsó becslés a lehető legnagyobb.

Szélsőérték-feladatok

A következőkben szeretnék bemutatni néhány szélsőérték-feladatot, amelyekben elkerülhető a deriválás, ha észrevesszük a nevezetes középértékekkel kapcsolatos tanult összefüggéseket.

Példa 14

Adott egy körcikk, amelynek területe $16m^2$. Mekkorának kell választani a sugarát, hogy a kerülete minimális legyen?

Mivel a körcikk területe $T = \frac{R^2\pi}{360^\circ}\alpha = 16m^2$ és kerülete $K = 2R + \frac{2R\pi}{360^\circ}\alpha$,

ezért a területből átrendezéssel kapjuk, hogy:

$$R^2 = \frac{360^\circ \cdot 16}{\pi\alpha}, \qquad \text{illetve} \qquad R = \sqrt{\frac{360^\circ \cdot 16}{\pi\alpha}},$$

Tehát
$$K = 2\sqrt{\frac{360^\circ \times 16}{\pi\alpha}} \cdot \left[1 + \frac{\pi\alpha}{360^\circ}\right]$$

Ha az $x = \frac{\pi\alpha}{360^\circ}$ paraméterrel dolgozunk a továbbiakban, akkor

$$K = 2\sqrt{\frac{1}{x}16}[1 + x] = 2\sqrt{\frac{1}{x}16} + 2\sqrt{\frac{1}{x}16}\sqrt{x^2},$$

azaz tovább alakítva

$$K = 2\sqrt{\frac{16}{x}} + 2\sqrt{16x} = 8\sqrt{\frac{1}{x}} + 8\sqrt{x} = 8\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{x}\right).$$

A $\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{x}$ kifejezést kell minimalizálni, hogy megkapjuk a kerület legkisebb értékét. Ehhez az alábbi trükköt alkalmazzuk: $\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{\frac{4}{x}} + \sqrt{4x}}{2}$. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségek ismerete szükséges az alsó korláthoz:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{4}{x}}\sqrt{4x}} \leq \frac{\sqrt{\frac{4}{x}} + \sqrt{4x}}{2},$$

vagyis
$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = 2 \leq \frac{\sqrt{\frac{4}{x}} + \sqrt{4x}}{2},$$

egyenlőség akkor és csak akkor állhat fent, ha a két szám, amelyre alkalmazzuk az egyenlőtlenséget megegyezik.

Azaz $\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{x}$, vagyis $\frac{1}{x} = x$ amiből következik, hogy $x=1$, mivel az eredeti kifejezésben x pozitív, csak ezt a megoldást vehetjük figyelembe. A kerület képletbe behelyettesítve $K = 16m$ adódik. Innen $R^2 = 16m^2$, vagyis $R = 4m$. A feladat geometriai tartalma miatt a negatív megoldást nem vesszük figyelembe.

Példa 15

Határozzuk meg annak a 60 egységnyi kerületű téglalapnak területét, amelynek az átlói a lehető legrövidebbek.

Ismerjük a kerületet, így annak a felét is $a+b=30$. Amennyiben a téglalapban behúzzuk az átlókat, akkor derékszögű háromszögek keletkeznek. Pitagorasz tételéből következik, hogy $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, ahol e az átló. A számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazva

$\frac{a+b}{2} \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{e}{\sqrt{2}}$. Mivel $\frac{a+b}{2}$ -t ismerjük, a kerületből ezzel becsülhetjük az átfogót:

$15\sqrt{2} \le e$. A minimalizálás során azt már megtanultuk, hogy egyenlőség akkor áll fent, ha a tagok megegyeznek. Ebből következik, hogy egyenlőszárú derékszögű háromszöget kaptunk, melynek területe 225 egység.

Példa 16

Határozzuk meg a 2π térfogatú hengerek közül a minimális felszínűt!

A henger térfogata: $r^2\pi m = 2\pi$ ezért, $rm = \frac{2}{r}$.

A felszín képlete: $A = 2\pi\left(r^2 + mr\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$. Mivel 2π értéke állandó, ezért elég a $r^2 + \frac{2}{r}$ kifejezés értékét minimalizálni. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségismeretében

$$\sqrt[3]{r^2\frac{1}{r}\frac{1}{r}} \le \frac{r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{3}.$$

Mivel az egyenlőség akkor és csak is akkor áll fent, ha a tagok megegyeznek.

Ezért, hogy $r^2 = \frac{1}{r}$, azaz $r = 1$ esetén minimális a felszín, mégpedig: $A = 2\pi\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) = 6\pi$.

Példa 17

Egy forgáshenger magasságának és sugarának összege 24cm. Válasszuk meg az adatokat úgy, hogy a henger térfogata maximális legyen!
A feladat szövege alapján, ahol *r* a sugár és *m* a magasság $r + m = 24$.
A térfogat $V = r^2\pi m = r^2\pi\left(24 - r\right)$.
Mivel π értéke állandó, ezért elég $\frac{V}{\pi} = \frac{1}{2}r^2 2\left(24 - r\right)$ maximumát megtalálni. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt $\sqrt[3]{rr\left(48 - 2r\right)} \le \frac{r + r + 48 - 2r}{3} = 16$, egyenlőség

akkor áll fent, ha $r = 48 - 2r$. Ebből következik, hogy $r = 16cm$ és $m = 8cm$,

ekkor a térfogat 6430,72 cm^3.

Irodalomjegyzék

- Laczkovich Miklós - T.Sós Vera: *Analízis 1*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
- Hajnal Imre: *Matematika 1*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
- Késedi Ferenc*: Egyenlőtlenségek,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- *Összefoglaló Feladatgyűjtemény Matematikából*, Szerkesztő: Gimes Györgyné, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001.
- *Sokszínű Matematika 10,* Szerkesztő: Tóth Katalin, Mozaik Kiadó, Szeged, 2002.

Internetes oldalak:

- http://www.okm.gov.hu
- http://hu.wikipedia.org/wiki
- http://www.komal.hu