Az *e* szám

Szakdolgozat

Készítette: Csuka Anita

Matematika Bsc, matematikai elemző szakirány

Témavezető: Besenyei Ádám, adjunktus

ELTE TTK, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának ötletét egy korábbi szakdolgozat adta, mely a π történetéről szólt. Én is szerettem volna utánajárni egy, a matematikában oly gyakran látott állandónak, mely hátteréről mégis keveset hallottam. Mindig is kedveltem az analízis tantárgyat, és mivel itt igen gyakran előfordul, a választásom az e számra esett.

Középiskolában még csak az $\ln x$ kifejezést láttuk néhányszor, semmit sem tudva arról, hogy miért is az e szám az alapja, és miért hívják ezt természetes alapú logaritmusnak. Aztán az egyetemi évek alatt kinyíltak a kapuk, mert egyre több témában és helyen lehetett találkozni ezekkel a fogalmakkal. Pontosan emiatt is döntöttem úgy, hogy a szakdolgozatom témájának az e számot szeretném választani, hiszen nagy hasznára van a matematikának.

Egy rövid történeti bevezetéssel kezdem a szakdolgozatom, ugyanis ez az állandó már több száz éves múltra tekint vissza. Megnézzük a logaritmusok kialakulásának főbb lépéseit, majd az e szám első legfontosabb megjelenéseit. Majd összefoglalom, hogy mit érdemes tudni az e-ről, a definícióit és a tulajdonságait is beleértve. A harmadik fejezet az e alapú exponenciális függvényről szól, először a valós, majd a komplex számok halmazán értelmezve. Az utolsó fejezetben egy nagyon fontos matematikai összefüggésben, a Stirling-formulában találkozunk az e számmal.

1. Az *e* szám története

1.1. A logaritmus története

A logaritmus szükségességét a XVI.-XVII. században kezdték felismerni. A matematikusok legfőbb célja ekkor az volt, hogy ne kelljen nagy számokat összeszorozniuk és osztaniuk egymással, ehelyett főleg összeadásokat és kivonásokat tartalmazó képletekre törekedtek. Ennek alapgondolata sokkal régebben megszületett. Ez a számtani és mértani sorozatok valamilyen módon való egymáshoz rendelése volt.

Ez az ötlet már az ókorban *Arkhimédésznél* is jelen volt, aki az a^0, a^1, a^2, a^3, ... mértani sorozattal összefüggésben felismerte az

$$a^k a^n = a^{k+n}$$

azonosságot. Itt a kitevők számtani sorozatához rendelte az a alapú hatványok mértani sorozatát.

Ezt bővítette ki *Michael Stifel* német matematikus, aki a negatív egész kitevőkre is alkalmazta a módszert. Észrevételét így fogalmazta meg: „Az összeadás az aritmetikai sorozatban megfelel a geometriai sorozatban való szorzásnak, éppen úgy a kivonás az egyikben a másikban való osztásnak.”[1]

Ez előkészítette a logaritmus elméleti gondolatát, de a gyakorlati alkalmazásra sem kellett sokat várni, hiszen a kereskedelemmel együtt előtérbe kerülő bankélet meg is követelte ezt a kamatos kamatszámítás miatt. Ehhez különféle táblázatok születtek.

Az első *Simon Stevin* holland mérnök nevéhez fűződik, amely a különböző p kamatlábakra és n évekre az $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ értékeit foglalta magába. Így a T_n

[1] Sain Márton: Nincs királyi út!, 504. oldal

felkamatozott tőke értékének kiszámításához t kezdeti tőke mellett már csak egy egyszerű szorzást kellett elvégezni:

$$T_n = t\ (1 + \frac{p}{100})^n.$$

Az $(1 + \frac{p}{100})^n$ rögzített p mellett egy mértani sorozatot határozott meg.

Ezt használta ki *Jost Bürgi* svájci órásmester és matematikus. 8 év alatt (1603-1611) óriási munkával egy hasznos logaritmustáblát készített. Tudta, hogy kis p megválasztása mellett egy kellően sűrű sorozatot kaphat, így a választása a 0,01-re esett. Létrejött az $a_n = (1 + \frac{1}{10^4})^n$ sorozat. Ezután a_1-hez a 10-et, a_2-höz a 20-at, …, a_n-hez a $(10 \cdot n)$-et kapcsolta hozzá. Az (a_n) sorozat tagjai fekete, 10 többszörösei pedig piros színezést kaptak. Azt akarta elérni, hogy bármely két fekete szám szorzata a hozzájuk tartozó piros számok összege legyen. Erről eszünkbe jut a $\log xy = \log x + \log y$ azonosság, vagyis mai szóval azt követelte meg, hogy minden számpárnál a piros szám a fekete logaritmusa legyen. 1620-ban adták ki ezt a művet *Számtani és mértani haladványtáblázat, részletes útmutatással, hogy miként használhatók ezek mindenféle számításoknál* címmel.

Őt megelőzte *John Napier* skót matematikus logaritmustáblája, mely 1614-ben Angliában jelent meg. A számításai részleteit tartalmazó *Canonis mirifici logarithmorum descriptio (A csodálatos logaritmustáblázat leírása)* csak halála után, 1619-ben lett kiadva. Mindezidáig csupán diszkrét értékekre vizsgálták az számtani és geometriai sorozatok kapcsolatát a tagok sűrítésével, azonban *Napier* egy folytonos esetet képzelt el, melyet egy mozgással modellezett. Tőle származik a logaritmus kifejezés elnevezése is a görög logosz, azaz arány és arithmosz, azaz szám összeolvasztásából.[2]

Henry Briggss, az Oxfordi Egyetem professzora bevezette a $\log 1 = 0$ kifejezést. Elvárása volt még, hogy a 10 logaritmusa tíznek valamilyen hatványa legyen. Ehhez a legjobb választásnak bizonyult a $\log 10 = 1$, így létrejött a tízes alapú logaritmus, valamint magának a logaritmus alapjának fogalma is. Műve egy

[2] Kós Rita-Kós Géza: Miért természetes az e? KöMal

nyolcjegyű logaritmus-táblázat volt, mely a számokat 1-től 1000-ig tartalmazta, *Logarithmorum chilias prima* címmel. Majd ezt kibővítve 1624-ben megjelent az *Arithmetica Logarithmica*, benne 1 és 20.000 illetve 90.000 és 100.000 közötti értékek 14 jegyű logaritmusaival.

1.2. Az *e* megjelenése

A $2{,}718\ldots$ számmal elsőként a *William Oughtred* által írt függelékben találkozhatunk *Napier Descriptio* című művében. Ebben a $\log_a 10 = 2{,}302585$ számítás szerepel, ahol $a \approx 2{,}71828$.

Az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola alatti területszámítással foglalkozott *Gregory of Saint-Vincent*, aki rájött, hogy az $x = 1$ és az $x = e$ pontok közötti terület pontosan egységnyi.

Euler az *Elmélkedés az ágyúzás legújabb tapasztalatairól* c. művében használja legelőször az e jelölést 1728-ban. 1736-ban nyomtatásban is napvilágot látott ez a szimbólum a *Mechanica* című könyvben.

Máig nem derült fény arra, hogy miről kapta ez az állandó az elnevezését. Egyik lehetőség, hogy *Euler* önmagáról nevezte el, másik lehetséges magyarázat, hogy az exponenciális függvény rövidítését jelenti. Az is előfordulhat, hogy az akkori matematikában gyakran használt jelölések, az a, b, c, d betűk sorában ez következett.

2. Az e szám

2.1. Az e előállításai

Első legfontosabb feladat, hogy meghatározzuk, mi is ez a szám. A konkrét értéke $e = 2{,}71828182845904523536\ldots$, de ami ennél érdekesebb, hogy hogyan lehet ezt előállítani a matematikában. Ebben a fejezetben kétféle módon közelítjük meg az e számot, egy sorozat határértékeként, illetve egy végtelen sor összegeként. A sorozatról kimondjuk és bebizonyítjuk, hogy konvergens, míg a végtelen sornál belátjuk, hogy tényleg az Euler-féle szám az összege.

2.1.1. Az e, mint sorozat határérték

2.1. Tétel. *Az* $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *sorozat szigorúan monoton növekedő és korlátos, tehát konvergens.*

2.2. Definíció. Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékét e-vel jelöljük, tehát

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A 2.1. Tételt szeretnénk bebizonyítani, amihez szükségünk van a monoton, illetve a korlátos sorozat fogalmának átismétlésére, e fogalmak és a konvergencia közötti kapcsolatról szóló tételre, valamint a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségre. Ezeket az alábbiakban foglaljuk össze röviden.

2.3. Definíció. Az (a_n) valós számsorozatot *monoton növekedőnek* nevezzük, ha

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots.$$

Amennyiben itt $\leq$ helyett mindenütt $\geq$ áll, a sorozatot *monoton csökkenőnek*, ha $<$, illetve $>$ áll, *szigorúan monoton növekedőnek*, illetve *szigorúan monoton csökkenőnek* nevezzük. Az (a_n) sorozatot *monoton sorozatnak* nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

2.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *korlátos*, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$.

2.5. Tétel. *Ha az (a_n) sorozat monoton növő és felülről korlátos vagy monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens. Ha (a_n) monoton növekedő, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\},$$

ha pedig monoton csökkenő, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}.$$

2.6. Tétel (Számtani-mértani-harmonikus közepek közti egyenlőtlenség**).**
Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ tetszőleges számok $(n \geq 1)$. Ekkor

$$A_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \textit{(számtani közép)},$$

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad \textit{(mértani/geometriai közép)},$$

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \quad \textit{(harmonikus közép)}$$

jelöléssel

$$H_n \leq G_n \leq A_n.$$

Bármelyik egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ezek után nézzük a 2.1. Tétel bizonyítását! Ezt Sikolya Eszter Analízis I. című jegyzete alapján dolgoztam fel.

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy a sorozat szigorúan monoton növő. Nyílván

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}}_{n\ darab} = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}}_{n\ darab},$$

így a számtani és mértani közép egyenlőtlenségét felírva az

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}_{n\ darab}}\leq\frac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+1}$$

összefüggést kapjuk. Itt egyenlőség nem állhat fenn, hiszen $1\neq\frac{n+1}{n}$. Ha $(n+1)$-edik hatványra emelünk, akkor az

$$1\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}_{n\ darab}<\left(\frac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

egyenlőtlenség adódik, amelynek a bal oldala e_n, jobb oldala pedig e_{n+1}, tehát

$$e_n<e_{n+1}.$$

Az (e_n) sorozat felülről korlátos is, ennek belátására szintén a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség használható. Tekintsük az $\frac{1}{4}e_n$-et és írjuk az alábbi alakba:

$$\frac{1}{4}\cdot e_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}_{n\ darab}.$$

Ebből

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}_{n\ darab}}\leq\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+2},$$

átrendezve

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}_{n\ darab}\leq\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+2}{n+2}\right)^{n+2}=1^{n+2}=1.$$

A baloldalon az $\frac{1}{4}e_n$ szerepel, ezért 4-gyel megszorozva az egyenlőtlenséget

$$e_n\leq 4$$

adódik minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén.

Bebizonyítottuk a monotonitást és a korlátosságot, amiből a 2.5. Tétel alapján következik a konvergencia, tehát ezzel beláttuk a 2.1. Tételt. ■

2.7. Megjegyzés. Az alsó korlát létezése triviális, hisz egy monoton növő sorozatnak az első tagja a sorozat alsó korlátja. Ez az $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$. Ezzel az alsó és a fenti felső korláttal a sorozat határértékére is kaptunk egy becslést, miszerint

$$2 \leq e \leq 4.$$

2.1.2. Az e, mint végtelen sor összege

2.8. Tétel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Bizonyítjuk is a tételt, ehhez a Rendőr-elvre, a Binomiális tételre és az általánosított Bernoulli-egyenlőtlenségre lesz szükségünk.

2.9. Tétel (Rendőr-elv). *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez léteznek olyan (x_n) és (y_n) sorozatok, hogy*

(i) *minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \leq a_n \leq y_n$, és*

(ii) $\lim x_n = \lim y_n =: A$.

Ekkor (a_n) konvergens, és $\lim a_n = A$.

2.10. Tétel (Binomiális tétel). *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n,$$

másképp írva:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Itt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad 1 \le k \le n, \qquad \binom{n}{0} = 1.$$

2.11. Tétel (Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha* $n > 1$ *egész és a* $t_1, t_2, \dots, t_n$ *valós számok mindegyike vagy a* $(-1{,}0]$ *vagy a* $[0, \infty)$ *intervallumban van (vagyis azonos előjelűek), akkor*

$$(1+t_1) \cdot (1+t_2) \cdot \ldots \cdot (1+t_n) \ge 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

A bizonyításnak alapjául szolgált Károlyi Katalin Általános Bernoulli-egyenlőtlenség című jegyzete.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

I. Megnézzük, hogy $n = 2$ –re igaz-e az egyenlőtlenség. Tehát

$$(1+t_1) \cdot (1+t_2) = 1 + t_1 + t_2 + t_1 \cdot t_2 \ge 1 + t_1 + t_2$$

teljesül-e. A válasz igen, mivel $t_1 \cdot t_2 \ge 0$ az azonos előjelük miatt.

II. Az indukciós feltétel következik, vagyis tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, tehát

$$(1+t_1) \cdot (1+t_2) \cdot \ldots \cdot (1+t_n) \ge 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

III. Bizonyítsuk be, hogy $(n+1)$-re is igaz! Szorozzuk meg a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalát $(1+t_{n+1})$-gyel. A relációs jel nem fordul meg, mert $t_{n+1} > (-1)$. Azaz

$$(1+t_1) \cdot \ldots \cdot (1+t_n) \cdot (1+t_{n+1}) \ge (1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \cdot (1+t_{n+1})$$
$$= 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + (1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \cdot t_{n+1}$$
$$= 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1} + t_1 \cdot t_{n+1} + t_2 \cdot t_{n+1} + \cdots + t_n \cdot t_{n+1}$$
$$\ge 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1}.$$

Ez szintén igaz, mert a tétel feltételei miatt minden $t_i \cdot t_{n+1}$ szorzat nemnegatív.

Ezzel a 2.11. Tételt beláttuk. ■

2.12. Megjegyzés. Ha a 2.11. Tételben szereplő $t_1, t_2, \dots, t_n$ számok egyenlők, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenséget kapjuk, amely a következő:

$$(1+t)^n \geq 1 + n \cdot t,$$

ahol $t \geq (-1)$ és $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ezután következik a 2.8. Tétel bizonyítása, mely megtalálható Sikolya Eszter Analízis I. című jegyzetében.

Bizonyítás. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

kifejezés definíció szerint azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Azt már tudjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke e, ezért azt fogjuk belátni, hogy a különbségük a 0-hoz tart, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right) = 0.$$

Írjuk ki a tagokat $k = 0, 1, 2, \dots, n$-re:

$$a_n = \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right) \to 0.$$

Belátjuk, hogy

$$0 \leq a_n \leq \frac{3}{2n}.$$

Ekkor a Rendőr-elv alapján készen vagyunk, ugyanis $\frac{3}{2n} \to 0$.

A Binomiális tétel szerint bontsuk ki az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tagot! Ekkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}\cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot 1^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Ha behelyettesítünk, akkor az

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[2 + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}\right]$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[2 + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} -$$

$$\left[\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} -$$

$$\left[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{2!}\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1 - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\cdot\left(1 - \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2!}\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

egyenlőséget kapjuk.

Ebben az összeg minden tagja $(0,1)$-beli, így az összeg nemnegatív. Ezzel az egyenlőtlenség bal oldalát beláttuk. A jobb oldal bizonyításához használjuk az általánosított Bernoulli-egyenlőtlenséget, amit a belső szorzatra írunk fel:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq 1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\cdots-\frac{k-1}{n}$$

$$=1-\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{k-1}{n}\right),$$

ahol $2\leq k\leq n$ tetszőleges.

Az $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{k-1}{n}$ nem más, mint egy $\frac{1}{n}$ differenciájú számtani sorozat első $(k-1)$ tagjának összege, ahol az első tag $\frac{1}{n}$, az utolsó pedig $\frac{k-1}{n}$. Ezért

$$S_{k-1}=\frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{k-1}{n}\right)\cdot(k-1)}{2}=\frac{k(k-1)}{2n},$$

vagyis

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq 1-\frac{k(k-1)}{2n},$$

így visszatérve

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k(k-1)}{2n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Most felhasználjuk, hogy az $n!$-t alulról lehet becsülni 2^{n-1}-nel, hiszen

$$n! = \underbrace{\underbrace{n}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\geq 2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2}_{=2}}_{(n-1)\, darab} \cdot 1 \geq 2^{n-1},$$

ha $n \geq 2$.

Így $k \geq 3$ esetén is igaz lesz a $(k-2)! \geq 2^{k-3}$ egyenlőtlenség. Ezt beépítve a képletbe kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{2n} \cdot \left(1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-2)!}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2n} \cdot \left(1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^{k-3}}\right) \leq \frac{1}{2n} \cdot \left(1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots}_{\leq 1}\right) \leq \frac{3}{2n}.$$

Ezzel az egyenlőtlenség jobb oldalát is beláttuk, amiből már a Rendőr-elv alapján következik a tétel. ■

2.13. Megjegyzés. Konvergencia szempontjából a végtelen sor összege gyorsabban tart az e-hez, mint a sorozat.

2.2. Az *e* irracionalitása

Felmerül a kérdés, hogy az e szám racionális-e? A válasz nem. Ezt elsőként *Leonhard Euler* mutatta meg. Ennél több is igaz, az e transzcendens szám. 1844-ben *Joseph Liouville* azt bizonyította be, hogy semmilyen egész együtthatós másodfokú polinomnak sem gyöke, 1873-ben *Charles Hermite* pedig már azt is, hogy transzcendens. Ezek az e szám igen fontos tulajdonságai, melyből az előbbit be is bizonyítjuk kétféleképpen.

2.14. Tétel. *Az e szám irracionális.*

Fourier bizonyítása:

Bizonyítás. Ehhez Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I. című könyvét vettem alapul. Ez a bizonyítás *Jean Baptiste Joseph Fourier*-től származik 1815-ből. Indirekt bizonyítást végzünk, vagyis tegyük fel, hogy az e racionális, tehát felírható két pozitív egész szám hányadosaként. Formálisan

$$e = \frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}^+,$$

ahol $q > 1$ feltehető, különben bővítjük a törtet. (A bizonyítás során nem használjuk, hogy p és q relatív prímek.) Legyen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

amely egy szigorúan monoton növő sorozat és a 2.8. Tétel szerint a határértéke e. A kettőből adódik, hogy $a_n < e$ minden n-re. Legyen $q < n$, így $a_q < a_n$. Tekintsük a következő szorzatot:

$$0 < q! \cdot \left(a_n - a_q\right)$$

$$= q! \cdot \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right]$$

$$= q! \cdot \left[\frac{1}{(q+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = \frac{q!}{(q+1)!} + \cdots + \frac{q!}{n!}$$

$$= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\cdot \ldots \cdot n}$$

$$\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$$

$$= \frac{1}{q+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}\right].$$

A zárójelen belül egy mértani sorozat összege jelenik meg, melynek első tagja az 1, kvóciense az $\frac{1}{q+1}$, a sorozat utolsó tagja az $\frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}$, mely az $(n-q)$-adik tag. Ez alapján az összegképlet:

$$S_{n-q}=\frac{1\cdot\left(\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}-1\right)}{\frac{1}{q+1}-1}=\frac{\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}-1}{\frac{1}{q+1}-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}}{1-\frac{1}{q+1}}.$$

Tehát visszatérve

$$q!\cdot\left(a_n-a_q\right)\leq\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1-\frac{1}{(q+1)^{n-q}}}{1-\frac{1}{q+1}}.$$

Az $1-\frac{1}{(q+1)^{n-q}}<1$, ezért

$$\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1-\frac{1}{(q+1)^{n-q}}}{1-\frac{1}{q+1}}<\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q+1-1}{q+1}}=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{q+1}{q}=\frac{1}{q}<1.$$

Összegezve

$$0<q!\cdot\left(a_n-a_q\right)<\frac{1}{q}<1.$$

Ha $n\to\infty$, akkor kapjuk, hogy

$$0<q!\cdot\left(e-a_q\right)\leq\frac{1}{q}<1,$$

és mivelhogy $e=\frac{p}{q}$, emiatt

$$0<q!\cdot\left(\frac{p}{q}-a_q\right)=q!\cdot\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q}<1.$$

Azonban

$$q!\cdot\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{(q-1)!}\cdot\frac{1}{q!}\right)$$

$$=\frac{p\cdot q!}{q}-\frac{q!}{0!}-\frac{q!}{1!}-\frac{q!}{2!}-\frac{q!}{3!}-\cdots-\frac{q!}{(q-1)!}-\frac{q!}{q!}$$

$$=p\cdot(q-1)!-q!-q!-(3\cdot4\cdot\ldots\cdot q)-(4\cdot\ldots\cdot q)-\cdots-q-1,$$

amely egész szám, mivel p és q egészek, így minden tag külön-külön is egész. Viszont ahogy láttuk, ez 0-nál szigorúan nagyobb és 1-nél szigorúan kisebb, ezért lehetetlen, hogy egész legyen. Tehát az a feltevés, hogy az e racionális legyen, helytelen. Ezzel az e irracionalitását igazoltuk. ■

A 3.2. fejezetben egy másik módon is bebizonyítjuk ezt az e^x függvény segítségével.

2.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy az α komplex szám *algebrai*, ha gyöke egy nem azonosan nulla egész együtthatós polinomnak.

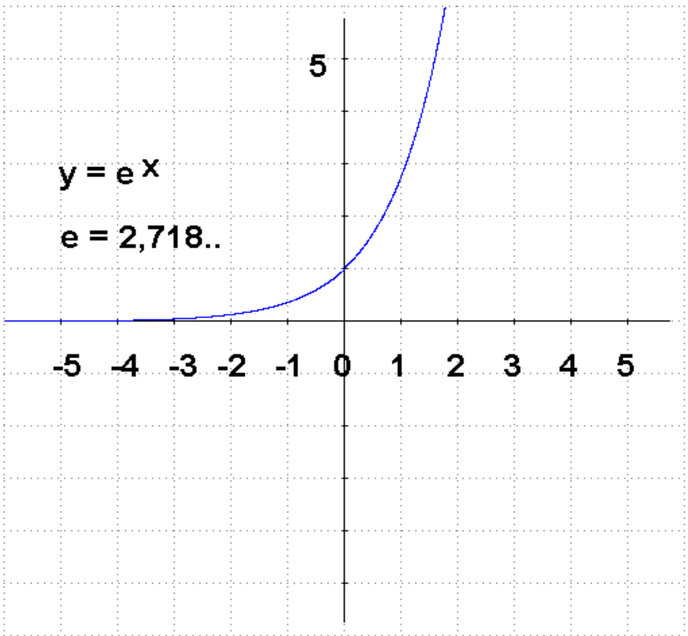
2.16. Megjegyzés. Minden racionális szám algebrai, hiszen minden $\frac{p}{q}$ alakban felírható szám gyöke a $qx - p$ polinomnak, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$. Az irracionális számok közül például a $\sqrt{2}$ algebrai, mert az $x^2 - 2$ polinomnak a gyöke.

2.17. Definíció. Egy számot *transzcendensnek* nevezünk, ha nem algebrai.

2.18. Tétel. *Az e szám transzcendens.*

3. Az e^x függvény

Ebben a fejezetben az exponenciális függvénnyel foglalkozunk, azon belül is az e alapúval. Definiáljuk kétféleképpen, sorozat határértékeként és végtelen sorösszegként, ezek természetesen szoros összefüggésben állnak az e meghatározásaival. Majd kimondjuk néhány fontos tulajdonságát. Végül a hozzárendelést kiterjesztjük a komplex számokra és ennek a segítségével az Euler-formulát is megismerjük.



3.1. ábra. e^x függvény

3.1. Az e^x definíciói és tulajdonságai

3.1. Tétel. *Az* $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *sorozat konvergens.*

3.2. Definíció.

$$e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

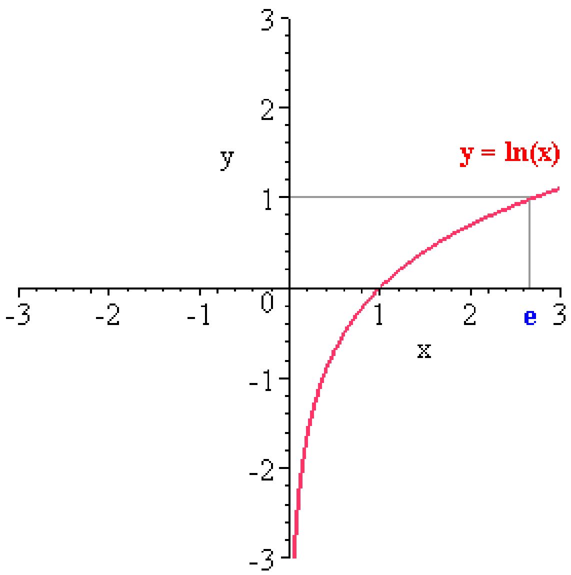
3.3. Tétel.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

3.4. Megjegyzés. Ha a 3.2. Definíció és a 3.3. Tétel képleteiben az x helyére az 1-et írjuk, visszakapjuk az e-ről szóló 2.2. Definíciót és a 2.8. Tételt.

3.5. Tétel. *Az e^x függvény mindenütt pozitív, szigorúan monoton növő, konvex és folytonos $\mathbb{R}$-en.*

Mivel az e^x függvény szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverz függvénye. Az inverz függvény is szigorúan monoton és folytonos.



3.2. ábra. $\log x$ függvény

3.6. Tétel. *A $\log x$ függvény szigorúan monoton növő, folytonos és szigorúan konkáv $(0, \infty)$-ben.*

Az e^x igen érdekes abból a szempontból, hogy a függvények körében egyedi módon önmaga a deriváltja.

3.7. Tétel. *(i) Az e^x függvény mindenütt differenciálható, és minden x-re*

$$(e^x)' = e^x .$$

(ii) Minden $x > 0$-ra

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

3.2. Az e szám irracionalitásának bizonyítása az e^x függvény segítségével

3.8. Lemma.

$$e_n = \int_0^1 x^n e^x dx = a_n \cdot e + b_n,$$

ahol $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Más szóval az integrál felírható az e és az 1 számok egész együtthatós lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

I. Megnézzük, hogy $n = 0$-ra igaz-e a lemma. Vagyis

$$e_0 = \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Teljesül a lemma, itt $a_0 = 1, b_0 = (-1)$.

II. Az indukciós feltétel: feltesszük, hogy n-re igaz.

III. Bizonyítsuk be, hogy $(n + 1)$-re is igaz a lemma! Tehát

$$e_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = a_{n+1} \cdot e + b_{n+1} \qquad a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{Z}.$$

A parciális integrálás elvét használjuk. Így kapjuk, hogy

$$\int \underbrace{x^{n+1}}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} dx = \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x^{n+1}}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(n+1) \cdot x^n}_{g'(x)} dx$$

$$= e^x \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot \int e^x \cdot x^n dx,$$

tehát

$$\int_0^1 x^{n+1} e^x dx = [1^{n+1} \cdot e^1 - 0^{n+1} \cdot e^0] - (n+1) \cdot \underbrace{\int_0^1 e^x \cdot x^n dx}_{\substack{a_n \cdot e + b_n \\ az\, ind.felt.\, szerint}}$$

$$= e - (n+1) \cdot (a_n \cdot e + b_n)$$

$$= e - (n+1) \cdot a_n \cdot e - (n+1) \cdot b_n$$

$$= (1 - (n+1) \cdot a_n) \cdot e - (n+1) \cdot b_n.$$

Mivel $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z}$, mert egy sorozat tagjairól beszélünk, így

$$\int_0^1 x^{n+1} e^x dx = a_{n+1} \cdot e + b_{n+1},$$

ahol $a_{n+1} = (1 - (n+1) \cdot a_n) \in \mathbb{Z}$ és $b_{n+1} = -(n+1) \cdot b_n \in \mathbb{Z}$.

Ezzel a lemmát beláttuk. ■

Most következik az e irracionalitásának bizonyítása, melynek vázlata a Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II. könyvben megtalálható.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítást végzünk, tegyük fel, hogy az e felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$. A 3.8. Lemmát felhasználva

$$\int_0^1 x^n e^x dx = a_n \cdot e + b_n = a_n \cdot \frac{p}{q} + b_n.$$

Szorozzuk meg az egyenletet q-val:

$$q_n = q \cdot \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 q \cdot x^n e^x dx = a_n \cdot p + q \cdot b_n.$$

Ez egy egész szám, hiszen az a_n és a b_n is egészek. A $q \cdot x^n e^x$ egy szigorúan pozitív függvény, emiatt az integrálja is pozitív. Tehát $q_n > 0$ egész szám minden n-re.

Vizsgáljuk meg, hogy mi a határértéke q_n-nek. Ehhez elég az integrál határértékét meghatározni, mivel ennek q-szorosa lesz a q_n határértéke.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy adott szám. Úgy válasszuk meg a t-t, hogy az $1 - t < \frac{\varepsilon}{2}$ igaz legyen. Ehhez a t-hez létezik N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $t^n < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az integrált felbonthatjuk egy összegre a következőképpen:

$$\int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^t x^n e^x dx + \int_t^1 x^n e^x dx.$$

Becsüljük a két integrált:

$$\int_0^t x^n e^x dx \leq 1 \cdot t^n \cdot e.$$

A szorzat első tagja 1, mert az intervallum hossza maximum 1. A második tag t^n, mert az x^n függvény monoton növő $[0,1]$-en, így a maximumát az adott intervallum végén veszi fel, vagyis az $x = t$ pontban. Az e^x függvény szintén monoton növő, így ezen az intervallumon maximum az e^1 értéket veheti fel. A

$$\int_t^1 x^n e^x dx \leq (1 - t) \cdot 1 \cdot e,$$

ugyanis az intervallum hossza $(1 - t)$, az x^n függvény az $x = 1$ pontban 1 és az e^x függvény értéke az $x = 1$ pontban e. Összesítve

$$\int_0^1 x^n e^x dx \leq t^n \cdot e + (1 - t) \cdot e = \Bigg(\underbrace{t^n}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{1 - t}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \Bigg) \cdot e < \varepsilon \cdot e,$$

ami egy kicsi szám. Ez azt jelenti, hogy

$$(1 - t + t^n) \cdot e \to 0,$$

tehát

$$\int_0^1 x^n e^x dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Emiatt $q_n \to 0$. Azonban q_n egy nem 0 egész szám, ezért nem tarthat 0-hoz. Itt az ellentmondás, a feltevés, hogy az e racionális szám, helytelen volt.
Így az irracionalitást bebizonyítottuk. ■

3.3. Az e^x kiterjesztése komplex számokra

3.3.1. Néhány szó a komplex számokról

Középiskolás éveink alatt azt tanuljuk, hogy ha a négyzetgyök alatt egy negatív szám áll, annak a kifejezésnek nincs értelme. Azonban egyetemi tanulmányainkból tudjuk, hogy ez így nem igaz. Hiszen van értelme bevezetni egy képzetes mennyiséget, aminek a négyzete a (-1). Ez a szám az imaginárius szóból az i jelölést kapta. Tehát $i^2 = (-1)$.

3.9. Definíció. *Komplex számoknak* nevezzük azokat az $a + b \cdot i$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

3.10. Megjegyzés. Egy $c \in \mathbb{R}$ szám is komplex szám, ennek megfelelő alakja a $c + 0 \cdot i$.

A komplex számok körében is ugyanúgy értelmezhetőek a matematikai műveletek, mint a valós számoknál, csak az eredményt mindig két tagra csoportosítjuk, i-t tartalmazóra és nem tartalmazóra. Tehát ha $x = a + b \cdot i$ és $y = c + d \cdot i$ komplexek, akkor

$$x + y = (a + c) + (b + d) \cdot i,$$

és

$$x \cdot y = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i.$$

Az abszolút érték értelmezése komplexek körében:

$$|a + b \cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3.3.2. Az e^z meghatározásai

Ha azt akarjuk definiálni, hogy hogyan emelünk komplex kitevőre, akkor ezt e alappal fogjuk megmutatni. Ehhez emlékezzünk vissza a 3.2. Definícióra, ugyanis ez a határérték akkor is értelmes, ha x helyén komplex áll. Vagyis ha tekintjük az $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ sorozatot, ahol $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges, akkor ennek is létezik határértéke.

3.11. Állítás. *Legyen* $z_n = a_n + b_n \cdot i, n \in \mathbb{N}$ *komplex számokból álló sorozat és* $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ *komplex szám. Pontosan akkor teljesül, hogy* $z_n \to z$*, ha*

- *a* $(|z_n - z|)$ *valós számsorozatra* $|z_n - z| \to 0$ *teljesül vagy*
- *az* (a_n) *és* (b_n) *valós számsorozatokra* $a_n \to a, b_n \to b$.

3.12. Tétel.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

A 3.3. Tétel is igaz komplex számokra, ezt mondja ki a következő tétel.

3.13. Tétel. *Tetszőleges* $z \in \mathbb{C}$-re *igaz, hogy*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

3.3.3. Az Euler-formula

Ha az e^z függvényben $z = i \cdot x$, akkor megkapjuk az Euler-formula általános képletét.

3.14. Állítás.

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3.15. Megjegyzés. Speciálisan, ha $x = \pi$, akkor

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{(-1)} + i \cdot \underbrace{\sin\pi}_{0} = (-1),$$

és ha $x = 2\pi$, akkor

$$e^{i2\pi} = \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + i \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} = 1.$$

Ha a 3.14. Állítást $(-i)$-re alkalmazzuk, kapjuk az $e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$ egyenletet. Ezek nagyon hasznosak, ugyanis a két egyenletből álló egyenletrendszer segítségével kifejezhető a $\sin x$ és $\cos x$ függvény, így létesítve kapcsolatot a trigonometrikus és exponenciális függvények között. Konkrétan

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

illetve

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ha a hiperbolikus függvények képletét is felelevenítjük, újabb praktikus összefüggésekhez jutunk. Ugyanis

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2},$$

ezekből pedig

$$\frac{\operatorname{sh}(ix)}{i} = \sin x$$

és

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos x$$

minden valós x-re.

4. A Stirling-formula

A fejezet a Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II. című könyv alapján készült. A Stirling-formula a pozitív egész számok faktoriálisára ad becslést, amely meglepő módon összefüggést teremt az $n!$ és két fontos matematikai állandó, az e és a π között. A formula *Stirling* közlése előtt már megjelent 1730-ban *Abraham de Moivre Miscellanea analytica* című könyvében.

4.1. Tétel (Stirling-formula)**.** *Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén igaz, hogy*

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

4.2. Megjegyzés. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén a következő egyenlőtlenség is igaz:

$$\left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/8n}.$$

A 4.1. Tétel jelentése definíció szerint az, hogy

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt{2\pi n}} \to 1, \qquad n \to \infty,$$

illetve ekvivalensen

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt{n}} \to \sqrt{2\pi}, \qquad n \to \infty.$$

Ezt be is bizonyítjuk, amihez szükség van a következő definíciókra, illetve néhány önmagában is érdekes tételre és eredményre, többek közt a Wallis-formulára, mely a π előállítását adja egy szorzat határértékeként.

4.1. A Wallis-formula és bizonyítása

4.3. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$(2n)!! \doteq 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$$

és

$$(2n+1)!! \doteq 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1).$$

Ezekre a jelölésekre a *szemifaktoriális* elnevezés szokásos.

4.4. Tétel (Wallis-formula**).**

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

A Wallis-formulát be is bizonyítjuk, ehhez igen hasznos lesz a következő tétel.

4.5. Tétel.

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \pi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \pi \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

és

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \cdot 2 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. Legyen

$$I_k \coloneqq \int_0^\pi \sin^k x\, dx \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

A $k = 0$-ra kapjuk, hogy

$$I_0 = \pi,$$

a $k = 1$-re pedig, hogy

$$I_1 = \int_0^\pi \sin x\, dx = \Bigg(-\underbrace{\cos \pi}_{(-1)}\Bigg) - \Bigg(-\underbrace{\cos 0}_{1}\Bigg) = 2.$$

Egy rekurzív sorozatot szeretnénk előállítani, $k \geq 1$ esetén

$$I_{k+1} = \int_0^\pi \sin^{k+1} x\, dx = \int_0^\pi \sin^2 x \cdot \sin^{k-1} x\ dx = \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \cdot \sin^{k-1} x\ dx$$

$$= \int_0^{\pi} [\sin^{k-1} x - \cos^2 x \cdot \sin^{k-1} x] \, dx = \int_0^{\pi} \sin^{k-1} x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^{k-1} x \, dx$$

$$= I_{k-1} - \int_0^{\pi} \cos x \cdot [\cos x \cdot \sin^{k-1} x] \, dx.$$

Parciális integrálással számolunk. Vagyis

$$\int \underbrace{\cos x}_{g(x)} \cdot \underbrace{[\cos x \cdot \sin^{k-1} x]}_{f'(x)} \, dx$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{k} \cdot \sin^k x\right)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g(x)} - \int \underbrace{\left(\frac{1}{k} \cdot \sin^k x\right)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \sin^k x \cdot \cos x + \frac{1}{k} \cdot \int \sin^{k+1} x \, dx,$$

így

$$\int_0^{\pi} \cos x \cdot [\cos x \cdot \sin^{k-1} x] \, dx$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \left[\underbrace{\sin^k \pi}_{0} \cdot \underbrace{\cos \pi}_{(-1)} - \underbrace{\sin^k 0}_{0} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}\right] + \frac{1}{k} \cdot \int_0^{\pi} \sin^{k+1} x \, dx = 0 + \frac{1}{k} \cdot I_{k+1}.$$

Tehát

$$I_{k+1} = I_{k-1} - \frac{1}{k} \cdot I_{k+1},$$

átrendezve

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot I_{k+1} = I_{k-1},$$

ebből

$$I_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot I_{k-1}.$$

A tétel az I_{2n}-et és az I_{2n+1}-et tartalmazza, ezeket a fenti rekurzióval kifejezve visszakapjuk a tétel egyenlőségeit, konkrétan

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$= \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \pi$$

és

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot I_{2n-3} = \cdots =$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 2.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

A Wallis-formula bizonyítása következik.

Bizonyítás. Legyen

$$I_k := \int_0^\pi \sin^k x \, dx \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ha a $\sin x$ függvény hatványait megvizsgáljuk, láthatjuk, hogy igaz a következő reláció:

$$\sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x$$

minden $x \in [0, \pi]$-re, hiszen itt a $\sin x$ függvény $[0,1]$-beli értéket vesz fel. Márpedig, ha ilyen a hatvány alapja, akkor a kitevő növekedésével a hatvány értéke csökkenő vagy konstans lesz. Ez alapján

$$I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1},$$

mert ha nagyobb a függvény, akkor nagyobb a függvény alatti terület is. Ezeket írjuk fel a 4.5. Tétel szerinti alakba! Tehát

$$I_{2n-1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2(n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)+1)} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot 2.$$

Innen

$$\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\cdot 2\geq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot \pi \geq \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\cdot 2.$$

Osszunk $\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$-nel! Ekkor

$$\left[\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2\cdot 2n\cdot 2\geq \pi \geq \left[\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2\cdot \frac{2}{2n+1}.$$

A bal oldalt alakítva kapjuk, hogy

$$\left[\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2\cdot \frac{1}{n}\geq \pi \geq \left[\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2\cdot \frac{2}{2n+1}.$$

Legyen $D_n = \left[\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2\cdot \frac{1}{n}$, így

$$D_n \geq \pi \geq D_n\cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Ha osztunk $\frac{2n}{2n+1}$-gyel, akkor

$$\frac{2n+1}{2n}\cdot D_n \geq \frac{2n+1}{2n}\cdot \pi \geq D_n.$$

A két egyenlőtlenség összefésüléséből kapjuk, hogy

$$\pi \leq D_n \leq \frac{2n+1}{2n}\cdot \pi.$$

Mivel $\frac{2n+1}{2n}\to 1$, így $\frac{2n+1}{2n}\cdot \pi \to \pi$. Az alsó és felső korlát is π-hez tart, így a Rendőr-elv értelmében D_n is. A D_n nem más, mint a Wallis-formulában lévő sorozat, amiről pontosan ezt kellett belátnunk. ■

4.6. Megjegyzés. Legyen

$$a_n = \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^2}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{\big((2\cdot 1)\cdot (2\cdot 2)\cdot \ldots \cdot (2\cdot n)\big)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{[2^n\cdot n!]^2}{(2n)!} = \frac{4^n\cdot (n!)^2}{(2n)!}$$

$$= 4^n \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 4^n \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)} = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}},$$

mivel a tört reciproka pontosan a $\binom{2n}{n}$ kifejtése:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Így a Wallis-formula szerint

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

4.2. A Stirling-formula bizonyítása

4.7. Definíció. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *monoton növő függvény*, ha bármely $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ és *monoton fogyó*, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$. *Szigorúan monoton növő* illetve *szigorúan monoton fogyó függvényekről* beszélünk, ha az egyenlőségek nincsenek megengedve.

4.8. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *konvex függvény*, ha $\forall x, y \in I$ és $\forall t \in [0,1]$ esetén

$$f(tx + (1-t)y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

Az f *konkáv függvény*, ha a $(-f)$ konvex, azaz az egyenlőtlenségben $\geq$ áll.

4.9. Tétel. *Ha f monoton csökkenő és konvex $[a, \infty)$- ben ($a \in \mathbb{Z}$), akkor az*

$$a_n = \sum_{i=a}^{n} f(i) - \int_a^n f(x)dx - \frac{f(a)+f(n)}{2} \qquad (n = a, a+1, \dots)$$

sorozat monoton növő és konvergens.

Bizonyítás. Legyen f egy monoton csökkenő és konvex függvény $[a, \infty)$-ben, ahogyan a tétel feltételében szerepel. Kijelölünk az x tengely pozitív szakaszán egy kezdőpontot, ez legyen a. Ettől kezdve osszuk egyenlő egységnyi darabokra az x tengelyt egy tetszőleges n pontig. Tekintsük a T_i trapézokat, melyek csúcsai az $(i-1{,}0), (i, 0), \big(i, f(i)\big)$ és az $\big(i-1, f(i-1)\big)$ pontok, ahol $i = a+1, \dots, n$. Mivel az f konvex, a trapézok $\big(i, f(i)\big)$ és az $\big(i-1, f(i-1)\big)$ pontjait összekötő oldala a függvény grafikonja fölött helyezkedik el, ezért ezen trapézok összterülete nagyobb, mint a függvénygörbe alatti terület. Vagyis

$$\int_a^n f(x)dx \leq \sum_{i=a+1}^{n} T_{T_i} = \sum_{i=a+1}^{n} \frac{f(i-1)+f(i)}{2},$$

mivel a trapéz alapjai $f(i-1)$ és $f(i)$ hosszúak, magassága pedig 1. Ez tagonkénti felírásban

$$\sum_{i=a+1}^{n} \frac{f(i-1)+f(i)}{2} = \frac{f(a)+f(a+1)}{2} + \frac{f(a+1)+f(a+2)}{2} + \cdots + \\ + \frac{f(n-1)+f(n)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f(a) + f(a+1) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2} \cdot f(n) = \sum_{i=a}^{n} f(i) - \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Tehát

$$\sum_{i=a+1}^{n} T_{T_i} = \sum_{i=a}^{n} f(i) - \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ebből megkapjuk a tételben szereplő a_n sorozatot:

$$a_n = \sum_{i=a}^{n} f(i) - \int_a^n f(x)dx - \frac{f(a)+f(n)}{2}$$

$$= \sum_{i=a+1}^{n} T_{T_i} - \int_a^n f(x)dx = \sum_{i=a+1}^{n} \left(T_{T_i} - \int_{i-1}^{i} f(x)dx \right) = \sum_{i=a+1}^{n} T_{D_i},$$

melyben D_i az a tartomány, melyet az $(i-1, f(i-1))$ és az $(i, f(i))$ pontokat összekötő grafikon és ugyanezen pontokat összekötő húr, vagyis a trapéz egy oldala határol. Mivel $T_{D_i} \geq 0$ és az a_n sorozat minden egyes tagját egy újabb ilyen terület hozzáadásával kapjuk, ebből következik, hogy az (a_n) sorozat monoton növő.

A tétel tartalmazza még a konvergenciát, ehhez elég a felülről való korlátosságot belátni a 2.5. tétel értelmében.

Minden $(i, f(i))$ ponthoz húzzunk érintőt $(i = a+1, \dots, n)$, ezeket nevezzük e_i egyeneseknek. A függvény konvexitása miatt ezek a függvénygrafikon alatt helyezkednek el. Rajzoljuk be az $x = i-1$ egyeneseket is $(i = a+1, \dots, n)$. Az e_i és az $x = i-1$ metszéspontjait nevezzük M_i-vel.

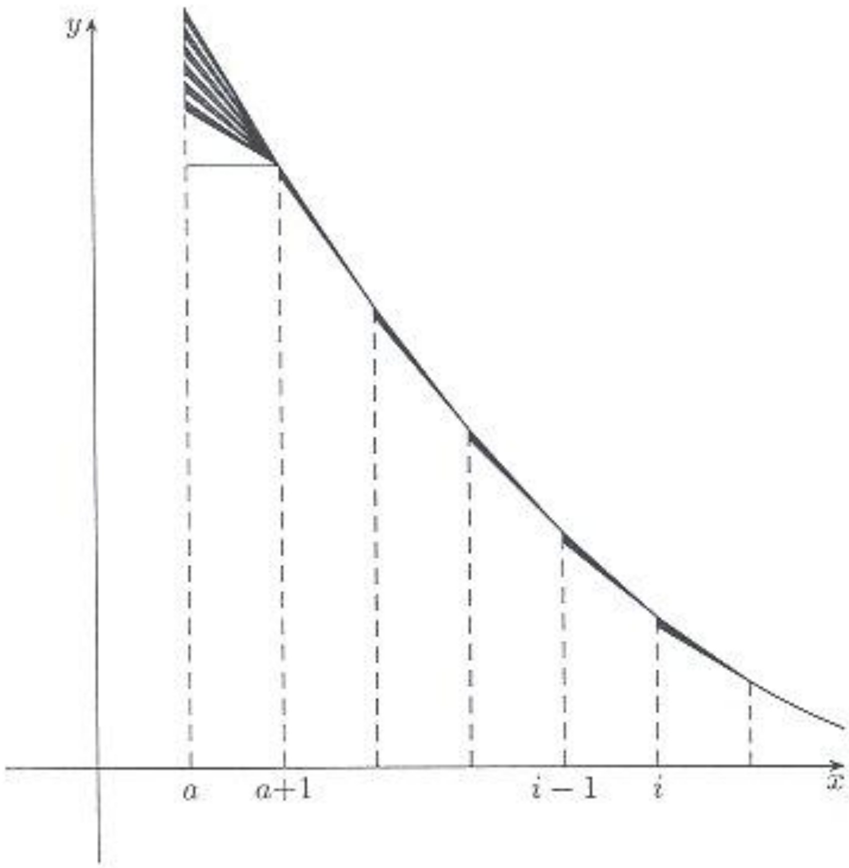
Ha figyeljük a besatírozott háromszögeket (lásd a 4.1. ábrát), láthatjuk, hogy a csúcsaik az M_i, az $(i, f(i))$ és az $(i-1, f(i-1))$ pontok. Ezek legyenek a H_i háromszögek, melyek részei a T_i trapézoknak. Ha a T_i-ből levágjuk a H_i-t, akkor kapjuk a K_i trapézokat $(i = a+1, \dots, n)$. Ezeknek az összterülete már kisebb a függvénygörbe alatti területnél, tehát

$$\int_a^n f(x)\,dx \geq \sum_{i=a+1}^{n} T_{K_i} = \sum_{i=a+1}^{n} T_{T_i} - \sum_{i=a+1}^{n} T_{H_i}$$

$$= \sum_{i=a}^{n} f(i) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \sum_{i=a+1}^{n} T_{H_i},$$

amiből átrendezéssel

$$\sum_{i=a+1}^{n} T_{H_i} \geq \sum_{i=a}^{n} f(i) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_{a}^{n} f(x)dx = a_n.$$



4.1. ábra

(Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. 166. oldal)

A H_i háromszögek két oldala, az e_i, illetve az $(i, f(i))$ és az $(i-1, f(i-1))$ pontokat összekötő egyenes negatív meredekségű. Ha balról jobbra tekintjük ezeket, akkor a konvexitás miatt a meredekségük monoton csökkenő, így a háromszögek egymásba csúsztathatóak átfedés nélkül. Toljunk el minden háromszöget úgy, hogy az $(i, f(i))$ pontok az $(a+1, f(a+1))$ pontba kerüljenek. Ekkor a H_i háromszögek beleférnek a P háromszögbe, melynek csúcsai az $\big(a, f(a)\big)$, az $\big(a+1, f(a+1)\big)$ és az $\big(a, f(a+1)\big)$ pontok. Ennek a területe, mivel derékszögű háromszögről van szó

$$\frac{\big(f(a)-f(a+1)\big)\cdot 1}{2}.$$

Így

$$\sum_{i=a+1}^{n} T_{H_i} \leq \frac{f(a)-f(a+1)}{2}.$$

Tehát összegezve

$$\frac{f(a)-f(a+1)}{2} \geq a_n,$$

és mivel ez a korlát nem függ az n-től, így ez a sorozat minden tagjára felső korlát lesz. Azt korábban beláttuk, hogy a sorozat monoton növő, így bebizonyítottuk, hogy az (a_n) konvergens is. ■

4.10. Megjegyzés. A 4.9. Tétel akkor is igaz, ha az f függvény monoton növő és konkáv, ekkor az (a_n) sorozat monoton csökkenő és konvergens.

Most bebizonyítjuk a Stirling-formulát.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.9. Tételt, pontosabban a 4.10. Megjegyzésben foglalt változatát, ahol az f legyen a $\log x$, vagyis a természetes alapú logaritmusfüggvény. A függvény megfelel a kritériumoknak, monoton növő és konkáv is az $[a, \infty)$-ben, ahol legyen $a = 1$. Helyettesítsünk be az összefüggésbe:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \log(i) - \int_{1}^{n} \log(x)\, dx - \frac{\log(1)+\log(n)}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bontsuk szét a kifejezést!

Az első tagnál az azonos alapú logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot használjuk. Tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \log(i) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n = \log(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) = \log n!.$$

Az integráláshoz szükség van a parciális integrálás elvére:

$$\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{g(x)} \, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int 1 \, dx = x \cdot \log x - x.$$

Vagyis

$$\int_1^n \log(x) \, dx = n \cdot \log n - n - (\log 1 - 1) = n \cdot \log \, n - n - \underbrace{\log 1}_{0} + 1$$

$$= n \cdot \log n - n + 1.$$

Összegezve

$$a_n = \log n! - \ (n \cdot \log n - n + 1) - \frac{1}{2} \cdot \log n =$$

$$= \log n! - n \cdot \log n + n - 1 - \frac{1}{2} \cdot \log n.$$

Ehhez újabb logaritmusfüggvény-azonosságokat felhasználva kapjuk a következő sorozatot:

$$a_n = \log n! - \log n^n - \log \sqrt{n} + \underbrace{n}_{\log e^n} - 1 = \log \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} - 1$$

$$= \log \frac{n!}{n^n \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} = \log \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} - 1,$$

ami a 4.10. Megjegyzés értelmében monoton csökkenő és konvergens, jelöljük a határértékét a-val. Vezessünk be egy új sorozatot, legyen

$$b_n = e^{a_n + 1} = e^{\log \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} - 1 + 1} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}.$$

Ez szintén konvergens és monoton csökkenő sorozat, hisz az e^x függvény monoton növekedő és így nem változtatja meg a (b_n) sorozat monotonitását. Az

e^x folytonos és (a_n) konvergens, így ha veszem (a_n) exponenciálisát az is konvergens lesz, méghozzá

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b = e^{a+1} > 0.$$

Tekintsük a ${b_n}^2/b_{2n}$ hányadost. A $({b_n}^2)$ határértéke b^2, a (b_{2n}) pedig a (b_n) egy részsorozata, melyben a páros indexű tagok szerepelnek. Ha a sorozatnak van határértéke, akkor a részsorozatnak is, és ezek megegyeznek, így $b_{2n} \to b$. Tehát

$$\frac{{b_n}^2}{b_{2n}} \to \frac{b^2}{b} = b.$$

Kifejtve

$$\frac{{b_n}^2}{b_{2n}} = \frac{\left(\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}\right)^2}{\dfrac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2n}}} = \frac{\dfrac{(n!)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot n}}{\dfrac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2n}}}$$

$$= \frac{(n!)^2}{n^{2n} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \cdot n} \cdot \frac{(2n)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n} \cdot n^{2n} \cdot \sqrt{2}}{n^{2n} \cdot \sqrt{n} \cdot (2n)!} = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2}.$$

Az első tag a 4.6. Megjegyzés szerint $\sqrt{\pi}$-hez tart, így az egész kifejezés $\sqrt{2\pi}$-hez,

$$\frac{{b_n}^2}{b_{2n}} \to b = \sqrt{2\pi},$$

azonban a b a $b_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}$ sorozat határértéke is, vagyis

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} \to \sqrt{2\pi},$$

és ezt szerettük volna belátni. ■

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megragadni az alkalmat és köszönetet nyilvánítani elsősorban konzulensemnek, Besenyei Ádámnak, aki visszajelzéseivel és szakmai észrevételeivel folyamatosan segítette munkámat. További szeretnék köszönetet mondani Édesanyámnak, aki lehetővé tette számomra, hogy idáig eljuthattam.

Irodalomjegyzék

[1] Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[2] Ian Stewart, *A végtelen megszelídítése*, Helikon, Budapest, 2008.

[3] Sain Márton, *Nincs királyi út!*, Gondolat, Budapest, 1986.

[4] K.A. Ribnyikov, *A matematika története*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[5] Kós Rita – Kós Géza, *Miért természetes az e?*, KöMal
http://www.komal.hu/cikkek/kg/e/e.h.shtml

[6] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[7] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.

[8] Sikolya Eszter, BSc Analízis I. előadásjegyzet 2009/2010. őszi félév
http://www.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2009_10_1/BSc_ea/BSc_analizis_I_eloadas.pdf

[9] Sikolya Eszter, BSc Analízis II. előadásjegyzet 2009/2010. tavaszi félév
http://www.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2009_10_2/BSc_ea/BSc_analizis_II_eloadas.pdf

[10] Károlyi Katalain, Általános Bernoulli-egyenlőtlenség
http://www.cs.elte.hu/~karolyik/Analizis_Gyakorlatok/03_Bernoulli_Egyenlotlenseg.pdf

[11] Dancs István, Analízis I., 2001.
http://www.bke.hu/~dancs/analizis1.pdf

Ábrajegyzék:

[1] 3.1. ábra. e^x függvény

http://www.madeasy.de/2/e.htm

[2] 3.2. ábra. $\ln x$ függvény

http://math.mit.edu/classes/18.013A/HTML/chapter02/section04.html

[3] 4.1. ábra

Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Analízis II.*

Nyilatkozat

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.