Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Csajkó Dóra

Maximum- és minimumelvek

BSc Alkalmazott Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Besenyei Ádám

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszöntet mondani témavezetőmnek, Besenyei Ádámnak a számtalan konzultációért, illetve hogy hasznos tanácsaival, építő kritikáival végig segítette a szakdolgozatom elkészítését.

Köszönettel tartozom a családomnak, a barátaimnak a sok támogatásért, elsősorban a szüleimnek, akik lehetővé tették, hogy egy ilyen kiváló egyetemen végezhessem tanulmányaimat.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozatban a hővezetési egyenletre vonatkozó maximum- és minimumelvekkel foglalkozunk. A hővezetés jelen van a mindennapjainkban, gondoljunk például arra, hogy az ember nap, mint nap tapasztalja bőrén a levegő hőmérsékletét.

A szakdolgozat első részében a stacionárius hőmérsékletet vizsgáljuk, azaz amikor a hőmérséklet időben állandó, csak térben változik. Ezt a folyamatot a Laplace-egyenlettel írhatjuk le. A fizikában ismert tény, hogy a szoba pontjainak stacionárius hőmérséklete legfeljebb akkora, mint a falakon mért maximális hőmérséklet. Ez nyilván akkor is igaz, ha hőforrás (pl. radiátor) nincs a szobában és csak esetleg valamely kémiai reakció során hő nyelődik el. Amennyiben pedig hő keletkezik, úgy a szoba pontjainak hőmérséklete legalább akkora, mint a falakon mért minimális hőmérséklet. Ezeket az észrevételeket a maximum- és minimumelvek fogalmazzák meg.

A maximum- és minimumelveket kiterjesztjük arra az esetre, amikor a hőmérséklet időben is változik. A hőmérséklet pontos meghatározásához ekkor szükségünk van a kezdeti hőmérséklet-eloszlásra, továbbá meg kell adnunk a hőmérséklet időbeli változását, azaz valamilyen peremfeltételt. Az ilyen kezdeti- és peremfeltételekkel rendelkező feladatokat nevezzük vegyes feladatoknak.

Előfordulhat azonban az is, hogy nem egy korlátos halmazon vizsgálódunk, hanem az egész térben, ekkor a peremfeltételre nincs szükség. Ilyenkor Cauchy-feladatokról beszélünk. A dolgozatban erre az esetre is megvizsgáljuk a maximumelvet.

2. fejezet

Elliptikus maximumelvek

A következőkben először bevezetjük a Laplace-operátort és ismertetjük a harmonikus függvények definícióját, majd megfogalmazzuk a maximum- és minimumelvet Laplace- és általánosabb operátorokra. Ezután az eredményeket a Dirichlet-feladatra alkalmazzuk. Igazoljuk a feladat megoldásának egyértelműségét, valamint felső becslést adunk a megoldás maximumára, ezzel belátjuk a megoldás folytonos függését.

2.1. A Laplace-operátor

A Laplace-operátort a gradiens és a divergencia segítségével fogjuk értelmezni.

2.1. Definíció. (Gradiens) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor az f skalármező gradiense az alábbi vektormező:

$$\operatorname{grad} f := (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f).$$

2.2. Definíció. (Divergencia) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény. Ekkor az f vektormező divergenciája az alábbi skalármező:

$$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \ldots + \partial_n f_n = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f_k.$$

2.3. Megjegyzés. A divergencia vektormezőkre alkalmazható differenciáloperátor, amely egy tér vagy térrész pontjaihoz egy számot rendel. Egy vektormezőre gondolhatunk úgy, mint például hő- vagy folyadékáramlás sebességvektoraira. A divergencia azt méri, hogy egy adott pont mennyire viselkedik forrásként vagy nyelőként a vektormezőre nézve. Ha egy $x \in \Omega$ pontban $\operatorname{div} f(x) > 0$, akkor az x pontban forrás van, ha $\operatorname{div} f(x) < 0$, akkor x nyelő. Egy vektormező divergenciamentes (összenyomhatatlan), ha $\operatorname{div} f = 0$ minden pontban.

2.4. Definíció. (Laplace-operátor) Legyen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmazon. Ekkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \ldots + \partial_n^2 u.$$

2.2. Harmonikus függvények

2.5. Definíció. Ha az $u \in C^2(\Omega)$ függvényre $-\Delta u = 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, akkor az u-t az Ω-n *harmonikus* függvénynek hívjuk. Ha $-\Delta u \leq 0$, akkor u-t *szubharmonikus* függvénynek nevezzük, a $-\Delta u \geq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő függvényeket pedig *szuper-harmonikus* függvényeknek.

2.6. Tétel. (Gyenge maximumelv Laplace-operátorra) *Ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \leq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmazon (más szóval u szubharmonikus Ω-n), akkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

A bizonyítás előtt egy segédállítást igazolunk, mely a későbbiekben is gyakran segítségünkre lesz.

2.7. Állítás. *Legyen K korlátos, zárt halmaz, $f_n : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekből álló függvénysorozat (ahol $n \in \mathbb{N}$), $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $f_n \to f$ egyenletesen a K halmazon. Ekkor*

$$\max_K f_n \to \max_K f.$$

Bizonyítás. Mivel f_n és f folytonos függvények a K korlátos és zárt halmazon, ezért Weierstrass tétele alapján létezik $\max\limits_K f_n$ és $\max\limits_K f$. Legyen $\varepsilon > 0$. Azt kell belátnunk, hogy $\left|\max\limits_K f_n - \max\limits_K f\right| < \varepsilon$, ha $n > N$, ahol N egy alkalmas küszöbindex.

Ha f_n tart f-hez egyenletesen, akkor van olyan N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\max\limits_K |f_n - f| < \varepsilon$. Ekkor minden $x \in K$ pontra $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ami pontosan azt jelenti, hogy $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ minden $x \in K$ esetén. Vizsgáljuk meg ezt a két egyenlőtlenséget. Ha $f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, akkor $f(x) \leq \max\limits_K f$ miatt minden $x \in K$ pontra teljesül, hogy $f_n(x) < \max\limits_K f + \varepsilon$, így speciálisan ez igaz az f_n függvény maximumára is, azaz $\max\limits_K f_n < \max\limits_K f + \varepsilon$.

Az előbbihez hasonlóan, ha $f(x) - \varepsilon < f_n(x)$, akkor $f(x) - \varepsilon < \max\limits_K f_n$ minden $x \in K$ esetén, amelyből $\max\limits_K f - \varepsilon < \max\limits_K f_n$ adódik. Mindezek alapján tehát $n > N$ esetén $\max\limits_K f - \varepsilon < \max\limits_K f_n < \max\limits_K f + \varepsilon$, vagyis $\left|\max\limits_K f_n - \max\limits_K f\right| < \varepsilon$.

Ezzel az állítást beláttuk. □

Most pedig nézzük a 2.6 tétel bizonyítását.

Bizonyítás. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a tételben szereplő maximumok léteznek, hiszen $\overline{\Omega}$ és $\partial\Omega$ korlátos és zárt halmazok, így Weierstrass tétele szerint a folytonos u függvénynek van maximuma és minimuma ezeken a halmazokon. Sőt, mivel $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, ezért $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \geq \max\limits_{\partial\Omega} u$. Azt kell belátnunk, hogy egyenlőtlenség nem állhat fenn.

A bizonyítást két lépésben végezzük el. Először feltesszük, hogy $-\Delta u < 0$ az Ω halmazon, majd a második lépésben az elsőből határátmenettel kapjuk a $-\Delta u \leq 0$ esetet.

1. lépés: Legyen $-\Delta u < 0$, és indirekt tegyük fel, hogy $\max\limits_{\overline{\Omega}} u > \max\limits_{\partial\Omega} u$, tehát van olyan $x_0 \in \Omega$, amelyre $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$. Ekkor x_0 lokális maximumhely, sőt tetszőleges változóra szorítkozva is az, így az első derivált és a lokális szélsőérték kapcsolatából tudjuk, hogy $\partial_j u(x_0) = 0$, valamint a második derivált és a lokális szélsőérték kapcsolata alapján $\partial_j^2 u(x_0) \leq 0$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Mivel

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \ldots + \partial_n^2 u,$$

ahol minden j-re $\partial_j^2 u(x_0) \leq 0$, így $-\Delta u(x_0) \geq 0$, ami ellentmondás a $-\Delta u < 0$ feltétel miatt. Beláttuk tehát, hogy $-\Delta u < 0$ esetén u az $\overline{\Omega}$-on vett maximumát kizárólag a peremen veszi fel, így egyúttal a $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$ egyenlőség is teljesül.

2. lépés: Legyen most $-\Delta u \leq 0$. Tekintsük az $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{x_1}$ függvényt, ahol $\varepsilon > 0$! Ekkor $-\Delta u \leq 0$ miatt

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = -\Delta u(x) - \varepsilon e^{x_1} \leq -\varepsilon e^{x_1} < 0,$$

hiszen az exponenciális függvény értékkészlete pozitív. Így az előző lépés alapján

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon. \tag{2.1}$$

Elegendő megmutatnunk, hogy $\varepsilon \to 0^+$ esetén $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ és $\max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max\limits_{\partial\Omega} u$. Vegyük észre, hogy $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{\Omega}$-on, hiszen $\varepsilon \to 0^+$ esetén

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_\varepsilon(x) - u(x)| = \max_{\overline{\Omega}}(\varepsilon \cdot e^{x_1}) = \varepsilon \cdot (\max_{\overline{\Omega}} e^{x_1}) \to 0.$$

Ekkor persze $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\partial\Omega$-n is, így a 2.7 állítás alapján $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ és $\max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max\limits_{\partial\Omega} u$, tehát a (2.1) egyenlőségből határátmenettel a bizonyítandó összefüggés adódik. $\square$

Az iménti tétel szuperharmonikus függvényekre vonatkozó párja a következő.

2.8. Tétel. (Gyenge minimumelv Laplace-operátorra) *Ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \geq 0$ az Ω nyílt halmazon (más szóval u szuperharmonikus Ω-n), akkor*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Bizonyítás. A $-\Delta u \geq 0$ azt is jelenti, hogy $-\Delta(-u) \leq 0$, tehát $(-u)$ szubharmonikus függvény. Alkalmazzuk a gyenge maximumelvet a $(-u)$ függvényre. Ekkor

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) = \max_{\partial\Omega}(-u).$$

Mivel $\max(-u) = -\min u$, ezért $-\min\limits_{\overline{\Omega}} u = -\min\limits_{\partial\Omega} u$, aminek (-1)-szeresét véve megkapjuk a tételben szereplő egyenlőséget. $\square$

A gyenge maximum- és minimumelvnél valójában egy erősebb állítás is igaz harmonikus függvényekre.

2.9. Tétel. (Erős maximum- és minimumelv) *Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u = 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományban (azaz u harmonikus függvény az Ω-n). Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u,$$

és ha $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ vagy $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$ valamely $x_0 \in \Omega$-ra, akkor u konstansfüggvény. Más szóval egy harmonikus függvény a tartomány lezártján vett maximumát és minimumát csakis a peremen veheti fel, kivéve azt az esetet, amikor a függvény konstans.

2.10. Megjegyzés. Fontos, hogy Ω tartomány, vagyis összefüggő, különben u az Ω egyes komponenseiben kell, hogy konstans legyen.

2.11. Megjegyzés. A gyenge és erős maximum- és minimumelvek pontosan a bevezetésben megfogalmazottak matematikai leírásai, azaz ha a szobában nem található forrás, akkor a szoba pontjainak stacionárius hőmérséklete legfeljebb akkora, mint a falakon mért maximális hőmérséklet, továbbá ha hő képződik, akkor a szoba pontjainak hőmérséklete legalább akkora, mint a falakon mért minimális hőmérséklet.

2.3. A maximumelv általánosabb operátorokra

Most tekintsük a Laplace-operátornál általánosabb $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátort, majd fogalmazzuk meg ennek segítségével a gyenge maximumelvet.

2.12. Lemma. (div(p grad u) operátor) *Legyen $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ kétszer és $p : \Omega \to \mathbb{R}$ egyszer differenciálható függvény. Ekkor*

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = p\Delta u + \sum_{j=1}^{n} (\partial_j p)\partial_j u. \tag{2.2}$$

2.13. Megjegyzés. A $p = 1$ esetben $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \Delta u$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a $p \operatorname{grad} u = (p\partial_1 u, p\partial_2 u, \ldots, p\partial_n u)$ vektormezőre a divergenciát. Ekkor

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(p\partial_j u) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j p)\partial_j u + \sum_{j=1}^{n} p \cdot \partial_j^2 u = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j p)\partial_j u + p\Delta u.$$

□

2.14. Tétel. (Gyenge maximumelv a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz és $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvény, amelyre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \le 0$, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$ és $p > 0$. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Bizonyítás. A bizonyítást a korábbiakhoz hasonlóan két lépésben végezzük el.

1. eset: Tegyük fel, hogy $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$. Belátjuk, hogy ekkor u az $\overline{\Omega}$-on vett maximumát csakis $\partial\Omega$-n veheti fel. Ha ugyanis valamely $x_0 \in \Omega$ esetén $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, akkor x_0 lokális maximumhely, következésképpen $\partial_j u(x_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0) \le 0$ minden j-re, ezért $\sum_{j=1}^{n} \partial_j p(x_0) \partial_j u(x_0) = 0$ és $\Delta u(x_0) \le 0$. Ebből pedig adódik, hogy $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \ge 0$ az x_0 pontban, ami viszont ellentmond a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$ feltételnek. Vagyis ha $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$, akkor a maximum csak a peremen vétetik fel.

2. eset: Az első esetből határátmenettel fogjuk kapni a tételt. Legyen ezért most $u_\varepsilon(x) = u(x) + +\varepsilon e^{\lambda x_1}$, ahol $\varepsilon > 0$ és $\lambda > 0$. Ekkor egyszerű deriválással adódik:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_\varepsilon) &= -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \varepsilon \operatorname{div}(p \operatorname{grad}(e^{\lambda x_1})) = \\ &= -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \varepsilon \operatorname{div}(p\lambda e^{\lambda x_1}, 0, \ldots, 0) = \\ &= -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \varepsilon\lambda(\lambda p + \partial_1 p) e^{\lambda x_1}. \end{aligned}$$

Ebből következően $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_\varepsilon) < -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ feltéve, hogy $\lambda p + \partial_1 p > 0$, vagyis például $\lambda > \max_{\overline{\Omega}} \left| \frac{\partial_1 p}{p} \right|$. Mivel $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \le 0$, ezért az előbbi egyenlőtlenségből következően $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_\varepsilon) < 0$, vagyis az 1. lépés szerint u_ε a tartomány peremén veszi fel a maximumát, így

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon. \tag{2.3}$$

Mivel rögzített λ mellett $\varepsilon \to 0^+$ esetén $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{\Omega}$-on, ezért a 2.7 állítás szerint $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max_{\overline{\Omega}} u$ és $\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max_{\partial\Omega} u$. Ekkor azonban a (2.3) egyenlőségből határátmenettel következik, hogy $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. □

Az előbbi tételt tovább általánosíthatjuk a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ alakú operátorokra.

2.15. Tétel. (Gyenge maximumelv $-\operatorname{div}(\boldsymbol{p}\operatorname{grad}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{qu}$ operátorra) *Legyen az $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)+qu\le 0$ az $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmazon, ahol $p\in C^1(\overline{\Omega})$, $p>0$ és $q\in C(\overline{\Omega})$, $q\ge 0$. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max_{\partial\Omega} u^+,$$

ahol $u^+(x)=\max\{u(x),0\}$ az u függvény pozitív része.

Bizonyítás. Tekintsük a következő halmazt: $V:=\{x\in\Omega : u(x)>0\}$. Ez egy nyílt halmaz, ugyanis u folytonos. Két esetre fogjuk bontani a bizonyítást attól függően, hogy V üres vagy sem.

1. eset: Legyen $V=\emptyset$, vagyis nem létezik olyan $x\in\Omega$, melyre $u(x)>0$, azaz minden $x\in\Omega$-ra $u(x)\le 0$. Ekkor azonban $u^+\equiv 0$. Következésképpen a bizonyítandó összefüggés a $\max\limits_{\overline{\Omega}} u\le 0$ egyenlőtlenségre egyszerűsödik, ami nyilvánvaló $u\le 0$ esetén.

2. eset: Legyen most $V\neq\emptyset$. Tudjuk, hogy $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)+qu\le 0$, így

$$-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)\le -qu. \tag{2.4}$$

Továbbá, ha $x\in V$, akkor $u(x)>0$ és mivel $q\ge 0$, ezért $x\in V$ esetén

$$-q(x)u(x)\le 0. \tag{2.5}$$

Azaz a (2.4) és a (2.5) egyenlőtlenségekből adódik, hogy $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)\le 0$ a V halmazon.

Alkalmazzuk a gyenge maximumelvet az u függvényre a V halmazon. Ekkor

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u. \tag{2.6}$$

Vegyük észre, hogy V-ben csak azok az x pontok vannak, amelyekre $u(x)>0$, így

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{V}} u, \tag{2.7}$$

illetve mivel ∂V-nek a $\partial\Omega$-tól vett diszjunkt részén $u=0$, ezért

$$\max_{\partial V} u = \max_{\partial\Omega} u^+. \tag{2.8}$$

Ekkor a (2.6), (2.7) és (2.8) egyenlőségekből adódik, hogy

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Ezzel tehát beláttuk az állítást. $\square$

A tételnek a minimumra vonatkozó párja a következő.

2.16. Tétel. (Gyenge minimumelv $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorra) *Legyen az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \geq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmazon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Ekkor*

$$-\max_{\partial\Omega} u^- \leq \min_{\overline{\Omega}} u,$$

ahol $u^-(x) = -\min\{u(x), 0\}$ az u függvény negatív része.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.15 tételt $(-u)$-ra. Ekkor

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+. \tag{2.9}$$

Itt

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) = -\min_{\overline{\Omega}} u, \tag{2.10}$$

és $(-u)^+ = u^-$ alapján

$$\max_{\partial\Omega}(-u)^+ = \max_{\partial\Omega} u, \tag{2.11}$$

Ekkor a (2.9), (2.10) és (2.11) összefüggésekből következik, hogy $-\min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^-$, amit (-1)-gyel szorozva kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. $\square$

2.17. Következmény. Ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$ az Ω korlátos, nyílt halmazon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $u^+ \leq |u|$ és $u^- \leq |u|$, ezért

$$-\max_{\partial\Omega} |u| \leq -\max_{\partial\Omega} u^-, \tag{2.12}$$

illetve

$$\max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{2.13}$$

Alkalmazzuk most a 2.15 és a 2.16 tételeket. Ekkor az alábbi becsléseket kapjuk:

$$-\max_{\partial\Omega} u^- \leq \min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Figyelembe véve a (2.12) és (2.13) egyenlőtlenségeket:

$$-\max_{\partial\Omega} |u| \leq \min_{\overline{\Omega}} u \leq u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Ebből következően $|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u|$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén, ezért

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \,.$$

Ez pedig csak úgy lehet, ha $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$, hiszen a fordított $\max_{\overline{\Omega}} |u| \geq \max_{\partial\Omega} |u|$ egyenlőtlenség mindig igaz. □

2.4. A Dirichlet-feladat

2.18. Definíció. (Dirichlet-feladat) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, továbbá tegyük fel, hogy $f \in C(\overline{\Omega})$ és $g \in C(\partial\Omega)$. Ha $Lu = -\Delta u$ vagy $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$, akkor az

$$\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{-ban,} \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

feladatot *Dirichlet-feladatnak*, más néven *első peremérték-feladatnak* nevezzük.

A Dirichlet-feladatra kétféleképpen is tekinthetünk. Egyrészt az eddigiekhez hasonlóan gondolhatunk rá úgy, mint a hővezetés stacionáris esetére, másrészt pedig szemlélhetjük úgy, mint a hullámegyenlet stacionárius esete.

A hővezetés esetében az $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény az Ω tartomány pontjainak hőmérsékletét írja le, amely időben állandó, csak térben változik. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény a forrástag, amely a tartományban lévő hőforrások és nyelők eloszlását adja meg, g pedig a perem hőmérsékletét írja elő.

A másik szemlélethez tekintsünk egy drótkeretet, amelyet szappanos vízbe mártunk. Ekkor a kereten egy szappanhártya képződik. A fizikai ismereteink alapján a felületi feszültség hatására a szappanhártya a lehető legkisebb felszínű állapot elérésére törekszik. Ha a hártyára úgy tekintünk, mint a hullámegyenlet stacionárius megoldása, melynek értékeit előírjuk a peremen (ez jelképezi a drótkeretet), akkor éppen egy Dirichlet-feladatot kapunk.

Megmutatjuk, hogy ha a Dirichlet-feladatnak van megoldása, akkor az egyértelmű. Kezdjük először az $Lu = -\Delta u$ esettel.

2.19. Tétel. (Egyértelműség Laplace-operátorra) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Ekkor a*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása lehet, azaz a megoldás egyértelmű, ha az létezik.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a peremérték-feladat megoldásai, azaz

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \Omega\text{-n}, \\ u_1|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = f & \Omega\text{-n}, \\ u_2|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

Ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_2) = 0 & \Omega\text{-n}, \\ (u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega\text{-n}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Alkalmazzuk a 2.17 következményt az u függvényre:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| .$$

Mivel $u|_{\partial\Omega} = 0$, ezért $\max_{\overline{\Omega}} |u| = 0$. Ebből pedig következik, hogy $u_1 = u_2$. $\square$

Legyen most $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$.

2.20. Tétel. (Egyértelműség $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorra) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Ekkor a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása lehet, azaz a megoldás egyértelmű, ha az létezik.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a peremérték-feladat megoldásai, azaz

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) + qu_1 = f & \Omega\text{-n}, \\ u_1|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_2) + qu_2 = f & \Omega\text{-n}, \\ u_2|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

Ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) + qu_1 + \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_2) - qu_2 = f - f & \Omega\text{-n}, \\ (u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = g - g, \end{cases}$$

vagyis

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0 & \Omega\text{-n}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Alkalmazva a 2.17 következményt: $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| = 0$, ebből pedig már adódik, hogy $u_1 = u_2$. $\square$

2.21. Tétel. (Folytonos függés Laplace-operátorra) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Ekkor létezik (csak Ω-tól függő) $C > 0$ konstans, amellyel minden $f \in C(\overline{\Omega})$ és $g \in C(\partial\Omega)$ esetén a*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladat egyértelmű $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldására

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \le \max_{\partial\Omega} |g| + C \max_{\overline{\Omega}} |f| \,.$$

Bizonyítás. A rövidség kedvéért használjuk az $Lu = -\Delta u$ jelölést.

Legyen Φ tetszőleges függvény, melyre $\Phi \ge 0$ és $L\Phi \le -1$ az $\overline{\Omega}$ halmazon. Például elég nagy λ választása mellett a $\Phi(x) = \lambda e^{x_1}$ függvény megfelelő lesz, ugyanis

$$L\Phi(x) = -\Delta(\lambda e^{x_1}) = -\partial_1^2(\lambda e^{x_1}) = -\lambda \cdot e^{x_1} < -\lambda \min_{\overline{\Omega}} e^{x_1} < 0,$$

így $\lambda > 1/\min\limits_{\overline{\Omega}} e^{x_1}$ esetén $L\Phi(x) = -\lambda \cdot e^{x_1} \le -1$.

Tekintsük a

$$v(x) = u(x) + \Phi(x) \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \,,$$

$$\tilde{v}(x) = -u(x) + \Phi(x) \max_{\overline{\Omega}} |Lu|$$

függvényeket. Ekkor $L\Phi \le -1$ és $Lu \le \max\limits_{\overline{\Omega}} |Lu|$ alapján

$$Lv = Lu + L\Phi \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \le Lu - \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \le 0.$$

Ennél fogva a v függvényre alkalmazható a gyenge maximumelv. Ekkor $\max\limits_{\overline{\Omega}} v \le \max\limits_{\partial\Omega} v^+$. Mivel $v^+ \le |v| \le |u| + (\max\limits_{\overline{\Omega}} \Phi) \cdot (\max\limits_{\overline{\Omega}} |Lu|)$, ezért

$$\max_{\partial\Omega} v^+ \le \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|),$$

így az $u \le v$ becslés felhasználásával azt kaptuk, hogy minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén

$$u(x) \le \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|). \tag{2.14}$$

Az előbbiek mintájára $L\Phi \le -1$ és $-Lu \le \max\limits_{\overline{\Omega}} |Lu|$ alapján

$$L\tilde{v} = -Lu + L\Phi \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \le 0,$$

ezért $\tilde{v}$-re alkalmazható a gyenge maximumelv. A korábbiakhoz hasonló meggondolással nyerjük, hogy minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén

$$-u(x) \le \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|). \tag{2.15}$$

A (2.14) és a (2.15) egyenlőtlenségből pedig adódik, hogy

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|),$$

azaz $C = \max_{\overline{\Omega}} \Phi$ konstans választással

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + C \max_{\overline{\Omega}} |Lu| .$$

□

2.22. Tétel. (Folytonos függés) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Ekkor létezik (csak Ω-tól, p-től és q-tól függő) $C > 0$ konstans, amellyel minden $f \in C(\overline{\Omega})$ és $g \in C(\partial\Omega)$ esetén a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladat egyértelmű $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldására

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C \max_{\overline{\Omega}} |f| .$$

Bizonyítás. A rövidség kedvéért használjuk az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ jelölést.

Legyen Φ tetszőleges függvény, melyre $\Phi \geq 0$ és $L\Phi \leq -1$ az $\overline{\Omega}$ halmazon. Elég nagy λ és μ választása esetén a $\Phi(x) = \lambda e^{\mu x_1}$ függvény megfelelő lesz, ugyanis

$$\begin{aligned} L\Phi(x) &= -p \cdot \partial_1^2(\lambda e^{\mu x_1}) - (\partial_1 p)\partial_1(\lambda e^{\mu x_1}) + q \cdot \lambda e^{\mu x_1} = \\ &= \lambda e^{\mu x_1}(-p\mu^2 - (\partial_1 p)\mu + q) \leq \lambda e^{\mu x_1}(-\min p \cdot \mu^2 + \max |\partial_1 p| \cdot \mu + \max q) = \\ &= \lambda e^{\mu x_1}(\mu(-\min p \cdot \mu + \max |\partial_1 p|) + \max q) < 0, \end{aligned}$$

így ha $\mu > \max |\partial_1 p| / \min p$ és $\lambda > 1/\min(e^{\mu x_1}(\mu(-\min p \cdot \mu + \max |\partial_1 p|) + \max q))$, akkor $L\Phi(x) \leq -1$. A bizonyítás további része a Laplace-operátorra vonatkozó esethez hasonlóan történik. □

3. fejezet

Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokkal foglalkozunk. Először ismertetjük a parabolikus henger, a parabolikus perem és a vegyes feladat definícióját, majd megfogalmazzuk a vegyes feladatra vonatkozó maximum- és minimumelveket Laplace- és általánosabb operátorok esetén. Végül pedig igazoljuk a megoldás egyértelműségét, és belátjuk a megoldás folytonos függését.

3.1. Maximum- és minimumelvek hővezetési egyenletre

Mindenekelőtt definiáljuk a parabolikus henger és a parabolikus perem fogalmát, valamint vezessük be a $C^{1,2}(Q_T)$ teret.

3.1. Definíció. (Parabolikus henger) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, továbbá $0 < T < \infty$. Ekkor a $Q_T = \Omega \times (0, T]$ halmaz neve *parabolikus henger*.

3.2. Definíció. (Parabolikus perem) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, valamint $0 < T < \infty$. Ekkor a $\Gamma_T = \overline{Q_T} \backslash Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$ halmaz neve *parabolikus perem*.

3.3. Definíció. ($C^{1,2}(Q_T)$ tér) A $C^{1,2}(Q_T)$ tér jelölje azon $u : Q_T \to \mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyek a t (vagyis az $(n+1)$-edik) változóban egyszer, a többi változóban pedig kétszer folytonosan differenciálhatók a Q_T hengeren.

A Laplace-operátorra vonatkozó 2.6 maximumelv időfüggő megfelelője az alábbi tétel.

3.4. Tétel. (Gyenge maximumelv) *Tegyük fel, hogy az* $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ *függvényre* $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ *a* Q_T *parabolikus hengeren. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy a tételben szereplő maximumok valóban léteznek, ugyanis $\overline{Q_T}$ és Γ_T korlátos és zárt halmazok, így Weierstrass tétele szerint a folytonos u függvénynek létezik szélsőértéke ezeken a halmazokon. Sőt, mivel $\Gamma_T \subset \overline{Q_T}$, ezért $\max_{\Gamma_T} u \leq \max_{\overline{Q_T}} u$. Tehát elegendő azt belátnunk, hogy egyenlőtlenség nem állhat fenn.

A bizonyítást két lépésben végezzük el. Először feltesszük, hogy $\partial_t u - \Delta u < 0$ a Q_T hengeren, majd a második lépésben az elsőből határátmenettel kapjuk a $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ esetet.

1. eset: Legyen $\partial_t u - \Delta u < 0$, és indirekt tegyük fel, hogy $\max_{\overline{Q_T}} u > \max_{\Gamma_T} u$, következésképpen van olyan $(x_0, t_0) \in Q_T$ pont, amelyre $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$. Most t_0 függvényében további két részre bontjuk az 1. esetet.

1. rész: Ha $0 < t_0 < T$, akkor (x_0, t_0) lokális maximumhely, így a lokális szélsőérték és az első derivált kapcsolatából tudjuk, hogy $\partial_t u(x_0, t_0) = 0$, továbbá a lokális szélsőérték és a második derivált kapcsolata alapján minden j-re $\partial_j^2 u(x_0, t_0) \leq 0$, ezért $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$. Ekkor azonban $\partial_t u(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0$, ami ellentmond a $\partial_t u - \Delta u < 0$ feltevésnek.

2. rész: Ha $t_0 = T$, akkor u-nak a t_0-ban csak féloldali maximuma van, következésképpen $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$ és $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$, azaz

$$\partial_t u(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0,$$

ami szintén ellentmondás a $\partial_t u - \Delta u < 0$ feltétel miatt.

Vagyis ha $\partial_t u - \Delta u < 0$, akkor a $\overline{Q_T}$-on vett maximum csak a parabolikus peremen vétetik fel.

2. eset: Legyen most $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ és $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \partial_t u(x, t) - \partial_t(\varepsilon t) - \Delta u(x, t) - \Delta(\varepsilon t) = \partial_t u(x, t) - \varepsilon - \Delta u(x, t),$$

hiszen $-\Delta(\varepsilon t) = 0$, mivel a Laplace-operátor csak az első n változóban hat, az $(n+1)$-edik t változóban nem. Mivel $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ és $\varepsilon > 0$, ezért

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \partial_t u - \Delta u - \varepsilon < 0,$$

így az első lépés alapján

$$\max_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon. \tag{3.1}$$

Megmutatjuk, hogy $\varepsilon \to 0^+$ esetén $\max\limits_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{Q_T}} u$ és $\max\limits_{\Gamma_T} u_\varepsilon \to \max\limits_{\Gamma_T} u$. Vegyük észre, hogy $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{Q_T}$-on, hiszen $\varepsilon \to 0^+$ esetén

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)| = \max_{\overline{Q_T}} |-\varepsilon t| = \varepsilon \cdot \max_{\overline{Q_T}} |-t| \to 0.$$

Ekkor $u_\varepsilon \to u$ Γ_T-n is, így a 2.7 állítás alapján $\max\limits_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{Q_T}} u$ és $\max\limits_{\Gamma_T} u_\varepsilon \to \max\limits_{\Gamma_T} u$, ezért a (3.1) összefüggésből határátmenettel adódik a tételben szereplő, $\max\limits_{\overline{Q_T}} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$ egyenlőség. □

Az előbbi tételnek a minimumra vontakozó párja a következő.

3.5. Tétel. (Gyenge minimumelv) *Tegyük fel, hogy az $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ a Q_T hengeren. Ekkor*

$$\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a gyenge maximumelvet a $(-u)$ függvényre. Ekkor

$$\max_{\overline{Q_T}}(-u) = \max_{\Gamma_T}(-u).$$

Mivel $\max(-u) = -\min u$, ezért $-\min\limits_{\overline{Q_T}} u = -\min\limits_{\Gamma_T} u$, aminek (-1)-szeresét véve megkapjuk a tételben szereplő egyenlőséget. □

A stacionárius hővezetés esetéhez hasonlóan a gyenge maximum- és minimumelvnél valójában egy erősebb összefüggés is igaz.

3.6. Tétel. (Erős maximum- és minimumelv) *Legyen az $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u = 0$ a Q_T hengeren, ahol Ω korlátos tartomány. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u, \quad \min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma_T} u,$$

és ha u felveszi $\overline{Q_T}$-beli maximumát vagy minimumát Q_T egy (x_0, t_0) belső pontjában, akkor u konstansfüggvény a Q_{t_0} hengeren. Más szóval, ha u valamilyen időpillanatban Q_T belsejében felveszi a maximumát vagy minimumát, akkor minden korábbi időpillanatban ezzel a maximummal vagy minimummal kell megegyeznie.

3.2. A maximumelv általánosabb operátorokra

A stacionárius esethez hasonlóan hővezetési egyenlet esetén is könnyen általánosíthatjuk a gyenge maximumelvet a $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ és a $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorokra, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$.

3.7. Tétel. (Gyenge maximumelv a $\boldsymbol{\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)}$ operátorra) *Tegyük fel, hogy az $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \leq 0$ a Q_T hengeren, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Bizonyítás. A bizonyítást most is két lépésben hajtjuk végre.

1. lépés: Legyen $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$ a Q_T hengeren, és indirekt tegyük fel, hogy $\max_{\overline{Q_T}} u > \max_{\Gamma_T} u$. Ebből adódóan van olyan $(x_0, t_0) \in Q_T$ pont, amelyre $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$. Különböztessünk meg két esetet t_0 függvényében.

Ha $0 < t_0 < T$, akkor (x_0, t_0) lokális maximumhely, ezért $\partial_t(x_0, t_0) = 0$, továbbá $\partial_j u(x_0, t_0) = 0$, $\partial_j^2(x_0, t_0) \leq 0$ minden $j = 1, \ldots, n$-re, következésképpen az (x_0, t_0) pontban

$$\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \partial_t u - p\Delta u - \sum_{j=1}^{n} (\partial_j p)\partial_j u \geq 0,$$

ami ellentmond a $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$ feltételnek.

Ha $t_0 = T$, akkor az u-nak a t_0-ban féloldali szélsőértéke van, ezért $\partial_t(x_0, t_0) \geq 0$, továbbá $\partial_j u(x_0, t_0) = 0$, $\partial_j^2(x_0, t_0) \leq 0$ minden $j = 1, \ldots, n$-re, ezért $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \geq 0$ az (x_0, t_0) pontban, ami szintén ellentmond a $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$ feltevésnek.

Vagyis beláttuk, hogy ha $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$, akkor u a $\overline{Q_T}$-on vett maximumát csakis Γ_T-n veheti fel.

2. lépés: Ebben a lépésben az elsőből határátmenettel kapjuk a tételt.

Legyen $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \leq 0$ és $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor az (x,t) pontban

$$\partial_t u_\varepsilon - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_\varepsilon) = \partial_t u - \varepsilon - p\Delta u - \sum_{j=1}^{n} (\partial_j p)\partial_j u = \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \varepsilon,$$

ugyanis $p\Delta(\varepsilon t) = 0$ és $\sum\limits_{j=1}^{n} (\partial_j p)\partial_j(\varepsilon t) = 0$, hiszen a Laplace-operátor az $(n+1)$-edik t változóban már nem hat, illetve a t változónak a j-edik változó szerinti deriváltja 0. Továbbá

$$\partial_t u_\varepsilon(x,t) - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_\varepsilon(x,t) = \partial_t u(x,t) - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u(x,t)) - \varepsilon < 0,$$

a feltétel miatt. Vagyis az első lépés alapján

$$\max_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon. \tag{3.2}$$

Vegyük észre, hogy $\varepsilon \to 0^+$ esetén $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{Q_T}$-on, ugyanis

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)| = \max_{\overline{Q_T}} |-\varepsilon t| = \varepsilon \cdot \max_{\overline{Q_T}} |-t| \to 0.$$

Ekkor $u_\varepsilon \to u$ Γ_T-n is, így a 2.7 állítás alapján $\max\limits_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{Q_T}} u$ és $\max\limits_{\Gamma_T} u_\varepsilon \to \max\limits_{\Gamma_T} u$, ezért a (3.2) egyenlőségből határátmenettel adódik a tételben szereplő, $\max\limits_{\overline{Q_T}} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$ összefüggés. □

Most nézzük meg a $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorra vonatkozó maximumelvet.

3.8. Tétel. (Gyenge maximumelv a $\boldsymbol{\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu}$ operátorra) *Ha az $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \leq 0$ a Q_T hengeren, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$ és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, akkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+,$$

ahol $u^+(x,t) = \max\{u(x,t), 0\}$ az u függvény pozitív része.

Bizonyítás. A bizonyítás a 2.15 tétel bizonyításához hasonlóan történik.

Tekintsük a következő halmazt: $G := \{(x,t) \in Q_T : u(x,t) > 0\}$. Ez egy nyílt halmaz, ugyanis u folytonos függvény. Két esetre bontjuk a bizonyítást attól függően, hogy G üres vagy sem.

1. eset: Legyen $G = \emptyset$, vagyis nem létezik olyan $(x,t) \in Q_T$, melyre $u(x,t) > 0$, azaz minden Q_T-beli (x,t) pontra $u(x,t) \leq 0$. Ekkor azonban $u^+ \equiv 0$. Ebből adódóan a bizonyítandó összefüggés a $\max_{\overline{Q_T}} u \leq 0$ egyenlőtlenségre egyszerűsödik, ami nyilvánvaló $u \leq 0$ esetén.

2. eset: Legyen most $G \neq \emptyset$. A feltételből tudjuk, hogy $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \leq 0$, így

$$\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \leq -qu. \tag{3.3}$$

Továbbá, ha $(x,t) \in G$, akkor $u(x,t) > 0$ és mivel $q \geq 0$, ezért $(x,t) \in G$ esetén

$$-q(x,t)u(x,t) \leq 0. \tag{3.4}$$

Azaz a (3.3) és a (3.4) egyenlőtlenségekből adódik, hogy $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \leq 0$ a G nyílt halmazon.

Alkalmazzuk a gyenge maximumelvet az u függvényre a G halmazon. Ekkor

$$\max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u. \tag{3.5}$$

Vegyük észre, hogy G-ben csak azok az (x,t) pontok vannak, amelyekre $u(x,t) > 0$, így

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\overline{G}} u, \tag{3.6}$$

illetve mivel ∂G-nek a Γ_T-től vett diszjunkt részén $u = 0$, ezért

$$\max_{\partial G} u = \max_{\Gamma_T} u^+. \tag{3.7}$$

Ekkor a (3.5), (3.6) és (3.7) egyenlőségekből adódik, hogy

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u^+.$$

Ezzel tehát beláttuk az állítást. $\square$

3.9. Tétel. (Gyenge minimumelv a $\boldsymbol{\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu}$ operátorra) *Ha az $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \geq 0$ a Q_T hengeren, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$ és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, akkor*

$$\min_{\overline{Q_T}} u \geq -\max_{\Gamma_T} u^-,$$

ahol $u^-(x,t) = -\min\{u(x,t), 0\}$, az u függvény negatív része.

Bizonyítás. A bizonyítás a stacionárius esettel analóg módon történik.

Alkalmazzuk a 3.8 tételt $(-u)$-ra. Ekkor

$$\max_{\overline{Q_T}}(-u) \leq \max_{\Gamma_T}(-u)^+. \tag{3.8}$$

Most

$$\max_{\overline{Q_T}}(-u) = -\min_{\overline{Q_T}} u, \tag{3.9}$$

és $(-u)^+ = u^-$ alapján

$$\max_{\Gamma_T}(-u)^+ = \max_{\Gamma_T} u^-. \tag{3.10}$$

Azaz a (3.8), (3.9) és (3.10) összefüggésekből adódik, hogy $-\min\limits_{\overline{Q_T}} u \leq \max\limits_{\Gamma_T} u^-$, aminek a (-1)-szeresét véve megkapjuk a bizonyítandó $\min\limits_{\overline{Q_T}} u \geq -\max\limits_{\Gamma_T} u^-$ egyenlőtlenséget. □

3.10. Következmény. Tegyük fel, hogy a Q_T hengeren az $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$ és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz. Ekkor

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $u^+ \leq |u|$ és $u^- \leq |u|$, ezért

$$-\max_{\Gamma_T} |u| \leq -\max_{\Gamma_T} u^-, \tag{3.11}$$

illetve

$$\max_{\Gamma_T} u^+ \leq \max_{\Gamma_T} |u|. \tag{3.12}$$

Alkalmazzuk a 3.8 és a 3.9 tételeket. Ekkor az alábbi becsléseket kapjuk:

$$-\max_{\Gamma_T} u^- \leq \min_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$$

Az (3.11) és (3.12) egyenlőtlenségek alapján:

$$-\max_{\Gamma_T} |u| \leq \min_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} |u|.$$

Ebből adódóan

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |u| .$$

Tehát megkaptuk, hogy $\max\limits_{\overline{Q_T}} |u| = \max\limits_{\Gamma_T} |u|$, hiszen a fordított $\max\limits_{\Gamma_T} |u| \leq \max\limits_{\overline{Q_T}} |u|$ egyenlőtlenség a $\Gamma_T \subset \overline{Q_T}$ tartalmazás miatt mindig igaz. $\square$

3.3. Egyértelműség és folytonos függés

A Dirichlet-feladatnak az időfüggő esetben a vegyes feladat felel meg.

3.11. Definíció. (Vegyes feladat) Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz és legyen $0 < T < \infty$. Ekkor a $\partial_t u - \Delta u = f$ hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus vegyes feladatban (más szóval kezdeti-peremértékfeladatban) olyan $u \in C^{1,2}(Q_T)$ függvényt keresünk, amely kielégíti a $\partial_t u - \Delta u = f$ egyenletet $f \in C(Q_T)$ esetén, továbbá $u \in C(\overline{Q_T})$, valamint teljesül az $u|_{\Gamma_T} = g$ peremfeltétel, ahol $g \in C(\Gamma_T)$ adott függvény:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & Q_T\text{-ben}, \\ \qquad u|_{\Gamma_T} = g. \end{cases}$$

A maximum-és minimuelvelnek vegyes feladatok megoldásaira nézve is vannak fontos következményei. Először megmutatjuk, hogy ha a feladatnak van megoldása, akkor az egyértelmű, majd belátjuk a megoldás folytonos függését.

3.12. Tétel. (Egyértelműség $\boldsymbol{\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)}$ operátorra) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, $0 < T < \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$. Ha a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f & Q_T\text{-n}, \\ \qquad\qquad u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladatnak létezik $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ megoldása, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a vegyes feladat megoldásai, azaz

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) = f & Q_T\text{-n}, \\ u_1|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_2) = f & Q_T\text{-n}, \\ u_2|_{\Gamma_T} = g. \end{cases}$$

Ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) - \partial_t u_2 + \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_2) = 0 & Q_T\text{-n}, \\ (u_1 - u_2)|_{\Gamma_T} = 0, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = 0 & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases}$$

Alkalmazzuk a 3.10 következményt az u függvényre:

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u| \,.$$

Mivel $u|_{\Gamma_T} = 0$, ezért $\max_{\overline{Q_T}} |u| = 0$. Ebből pedig következik, hogy $u_1 = u_2$. $\square$

3.13. Tétel. (Egyértelműség $\boldsymbol{\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu}$ operátorra) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz és $0 < T < \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. Ha a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladatnak létezik $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ megoldása, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a vegyes feladat megoldásai, azaz

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) + qu_1 = f & Q_T\text{-n}, \\ u_1|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_2) + qu_2 = f & Q_T\text{-n}, \\ u_2|_{\Gamma_T} = g. \end{cases}$$

Ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) + q u_1 - \partial_t u_2 + \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_2) - q u_2 = f - f & Q_T\text{-n}, \\ (u_1 - u_2)|_{\Gamma_T} = g - g, \end{cases}$$

vagyis

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q u = 0 & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases}$$

Alkalmazzuk a 3.10 következményt: $\max\limits_{\overline{Q_T}} |u| = \max\limits_{\Gamma_T} |u| = 0$, ebből pedig már adódik, hogy $u_1 = u_2$. □

3.14. Tétel. (Folytonos függés) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. Ekkor létezik (csak Ω-tól, p-től és q-tól függő) $C > 0$ konstans, amellyel minden $f \in C(\overline{Q_T})$ és $g \in C(\Gamma_T)$ esetén a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q u = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladat egyértelmű $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ megoldására

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |g| + C \max_{\overline{Q_T}} |f| \, .$$

Bizonyítás. A rövidség kedvéért használjuk az $Lu = \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ jelölést.

Válasszunk egy Φ tetszőleges függvényt, amelyre $\Phi \geq 0$ és $L\Phi \leq -1$ a Q_T henger lezártján. Például a $\Phi(x,t) = e^{-\lambda t}$ függvény megfelelő lesz elég nagy $\lambda > 0$ választása mellett, ugyanis

$$L\Phi(x,t) = \partial_t e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} < -\lambda \cdot \min_{\overline{Q_T}} e^{-\lambda t} < 0,$$

így $\lambda > 1/ \min\limits_{\overline{Q_T}} e^{-\lambda t}$ esetén $L\Phi(x,t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \leq -1$. A bizonyítás további része a 2.22 tételhez hasonlóan történik. □

4. fejezet

Cauchy-feladatok

Ebben a szakaszban a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatokkal foglalkozunk. Először definiáljuk a Cauchy-feladat fogalmát, majd bevezetjük a hővezetési egyenlet alapmegoldását, végül pedig megfogalmazzuk a maximumelvet Cauchy-feladatokra.

4.1. Cauchy-feladatok, alapmegoldás

Definiáljuk a 3.3 függvénytér segítségével a klasszikus Cauchy-feladat fogalmát.

4.1. Definíció. A $\partial_t u - \Delta u = f$ hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatban (más szóval kezdetiérték-feladatban) olyan $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ függvényt keresünk, amely kielégíti a $\partial_t u - \Delta u = f$ egyenletet $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ esetén, továbbá $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, valamint teljesül az $u(x,0) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltétel, ahol $g \in C(\mathbb{R}^n)$ adott függvény:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ \quad u(x,0) = g(x) & \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.1}$$

A Cauchy-feladatra vonatkozó maximumelv bizonyításához szükségünk lesz a hővezetési egyenlet alapmegoldására.

4.2. Definíció. Tekintsük a

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$$

hővezetési egyenletet. Ekkor az $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0 \end{cases}$$

függvényt a hővezetési egyenlet alapmegoldásának nevezzük.

4.3. Tétel. *A 4.2 definícióban értelmezett alapmegoldás valóban kielégíti a hővezetési egyenletet $t > 0$ esetén, azaz*

$$\partial_t E(x,t) - \Delta E(x,t) = 0, \quad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n).$$

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű számolással adódik $t > 0$ esetén:

$$\partial_t E(x,t) = -\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right), \tag{4.2}$$

továbbá

$$\partial^2_{x_j} E(x,t) = -\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{1}{2t} + \frac{x_j^2}{4t^2} \right),$$

vagyis

$$\Delta E(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j} E(x,t) = -\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{n}{2t} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}{4t^2} \right). \tag{4.3}$$

Következésképpen a (4.2) és (4.3) összefüggésekből kapjuk, hogy $\partial_t E(x,t) - \Delta E(x,t) = 0$. $\square$

4.2. Maximumelv Cauchy-feladatokra

4.4. Tétel. (Maximumelv Cauchy-feladatokra) *Legyen $T > 0$ és tegyük fel, hogy az $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ függvényre $\partial_t u - \Delta u = 0$ az $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ halmazon, továbbá*

$$|u(x,t)| \leq Ce^{\gamma|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T)$$

valamilyen rögzített $C > 0$ *és* $0 < \gamma < \frac{1}{4T}$ *konstansokkal. Ekkor*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0).$$

Bizonyítás. Mivel az $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times [0,T]$ tartalmazás miatt a $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) \leq \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, ezért elegendő csak a másik irányt belátni.

A másik irányhoz először definiálunk egy v függvényt, amelyre alkalmazzuk a vegyes feladatra vonatkozó maximumelvet, majd megmutatjuk, hogy igaz a $\max_{\Gamma_T} v \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$ összefüggés, amelyből határátmenettel kapjuk a $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) \geq \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u$ egyenlőtlenséget.

A $0 < \gamma < \frac{1}{4T}$ feltevés szerint létezik $\varepsilon > 0$, amelyre $4\gamma(T+\varepsilon) < 1$. Legyen $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$ és értelmezzük a

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T)$$

függvényt. Vegyük észre, hogy valójában ebben a függvényben az alapmegoldás rejlik az $i(x-y)$ és a $T+\varepsilon-t$ argumentumokkal, ahol i a képzetes egység, vagyis a 4.2 definíciót felhasználva

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - (4\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mu \cdot \frac{1}{(4\pi(T+\varepsilon-t))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-i^2|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} = \\ &= u(x,t) - (4\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mu \cdot E(i(x-y), T+\varepsilon-t), \end{aligned}$$

ahol $(x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T)$. Ekkor mivel u megoldás és E az alapmegoldás, ezért v is megoldás, következésképpen $\partial_t v - \Delta v = 0$ az $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ sávban.

Legyen $r > 0$ és tekintsük a $Q_T = B(y,r) \times (0,T]$ parabolikus hengert, amelyre alkalmazva a 3.4 tételben szereplő maximumelvet

$$\max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Ha megmutatjuk, hogy elég nagy $r > 0$ esetén

$$\max_{\Gamma_T} v \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0), \tag{4.4}$$

akkor $v(y,t) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$ minden $y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$ esetén. Vegyük észre, hogy $\mu \to 0$ esetén $v(y,t)$ egyenletesen tart az $u(y,t)$ függvényhez az $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ halmazon, ezért ebből határátmenettel $u(y,t) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$ adódik minden y-ra, következésképpen $\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} u \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$, tehát készen vagyunk.

Hátra van még a (4.4) összefüggés igazolása. Legyen $(x_0,t_0)\in\Gamma_T$. Ekkor $t_0=0$ vagy x_0 az y középpontú r sugarú gömbfelületen van.

Ha $t_0=0$ és $x_0\in\mathbb{R}^n$, akkor

$$v(x_0,0)=u(x_0,0)-\frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x_0-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(x_0,0) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0),$$

hiszen $\frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x_0-y|^2}{4(T+\varepsilon)}}>0$.

Ha pedig $|x_0-y|=r$, $0\leq t\leq T$, akkor alkalmazva az $|u(x,t)|\leq Ce^{\gamma|x|^2}$ feltételt,

$$\begin{aligned} v(x_0,t)=u(x_0,t)-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} &\leq \\ \leq Ce^{\gamma|x_0|^2}-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}&. \end{aligned}$$

Mivel $|x_0|=|x_0-y+y|\leq|x_0-y|+|y|=r+|y|$, ezért

$$Ce^{\gamma|x_0|^2}-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq Ce^{\gamma(|y|+r)^2}-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}},$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$v(x_0,t)\leq Ce^{\gamma(|y|+r)^2}-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}. \tag{4.5}$$

Megmutatjuk, hogy a jobb oldal $r\to\infty$ esetén $-\infty$-hez tart. Mivel mindkét tag, $Ce^{\gamma(|y|+r)^2}$ és $\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$ is a végtelenhez tart, így azt kell belátni, hogy a második gyorsabban tart a végtelenhez. A határértéket a kitevők határozzák meg, így felhasználva azt, hogy $\gamma<\frac{1}{4(T+\varepsilon)}$ és y fix, az első tag esetében a kitevő legnagyobb nagyságrendű tagja γr^2, míg a másik tag kitevőjét alulról becsülhetjük γr^2-tel, hiszen

$$\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}>\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}>\gamma r^2.$$

Vagyis a (4.5) egyenlőtlenség jobb oldalának második tagja gyorsabban tart a végtelenhez, ezért ha $r\to\infty$, akkor $v(x_0,t)\to-\infty$, következésképpen elég nagy r választással $v(x_0,t)\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}u(x,0)$.

Beláttuk tehát, hogy

$$v(x_0, t_0) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) \quad ((x_0, t_0) \in \Gamma_T),$$

ezért a (4.4) egyenlőtlenség teljesül, így a bizonyítás is kész. $\square$

Megfelelő feltételekkel a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladat megoldása egyértelmű és meg is adható képlet segítségével. Ezt fogalmazzuk meg a következő tételben, amelyet nem bizonyítunk.

4.5. Tétel. (A megoldás egyértelműsége) *Legyen* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *és* $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, *ahol* $T > 0$ *adott. Ekkor a hővezetési egyenletre vonatkozó* (4.1) *klasszikus Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik olyan megoldása, amelyre minden* $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ $(T > 0)$ *sávban*

$$|u(x, t)| \leq C_T e^{\gamma_T |x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T)$$

valamilyen (T*-től függő)* C_T, γ_T *konstansokkal. Ezt az egyértelmű megoldást az*

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(x - 2\sqrt{t - \xi}\eta, \xi) d\eta d\xi + \\ + \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta$$

formulával adhatjuk meg.

Irodalomjegyzék

[1] Besenyei Ádám – Komornik Vilmos – Simon László, *Parciális differenciálegyenletek*