EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

SZAKDOLGOZAT

A fizikai szemlélet meglepő alkalmazásai matematikafeladatok megoldásában

Témavezető:

Besenyei Ádám

Egyetemi docens

Készítette:

Träger Magdolna

fizikatanár – matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2020

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott TRÄGER MAGDOLNA, Neptun-kód: SAFUPA ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE fizikatanár-matematikatanár osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2020.04.30.

Träger Magdol

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezetés **7**

1. Tömegközéppont és összegek **9**

1.1. Tömegpontok egy egyenesen . . . 9

1.1.1. Szimmetria, számtani sorozat, binomiális összegek . . . 11

1.1.2. Összevonási elv és a négyzetszámok összege . . . 15

1.1.3. Átpakolási elv és a Csebisev-egyenlőtlenség . . . 16

1.2. Tömegpontok a síkon . . . 18

1.2.1. Az első n négyzetszám összege . . . 20

1.3. Módszertani kitekintés . . . 21

1.3.1. Kerettantervi illeszkedés . . . 21

1.3.2. Tankönyvi kapcsolódások . . . 23

2. Egyszerű áramkörök és egyenlőtlenségek **25**

2.1. Fizikai alapok . . . 25

2.2. Nevezetes közepek . . . 27

2.2.1. Számtani és harmonikus közép két számra . . . 27

2.2.2. Számtani és harmonikus közép általános esetben . . . 29

2.2.3. A mértani közép egy előfordulása . . . 30

2.3. További nevezetes egyenlőtlenségek . . . 33

2.3.1. Milne-egyenlőtlenség . . . 34

2.3.2. Minkowski-egyenlőtlenség egy speciális esete . . . 36

2.3.3. Egy OKTV feladatbeli egyenlőtlenség . . . 40

2.4. Módszertani kitekintés . . . 43

2.4.1. Kerettantervi illeszkedés . . . 43

2.4.2. Tankönyvi kapcsolódások . . . 44

3. Egyensúly és szélsőérték **47**

3.1. Lineáris regresszió . . . 47

3.1.1. Matematikai megoldás . . . 47

3.1.2. Egyenesillesztés rugókkal . . . 51

3.2. Elektrosztatikus egyensúly . . . 53

3.2.1. Háromszög súlypontjának egy érdekes tulajdonsága . . . 53

3.2.2. Fizikai szemléltetés 54
3.3. Egy középiskolai szélsőérték-feladat 57
3.3.1. Matematika-tankönyvi példa 57
3.3.2. Megoldás a fizika segítségével 59
3.4. Módszertani kitekintés 61
3.4.1. Kerettantervi illeszkedés 61
3.4.2. Tankönyvi kapcsolódások 62

Irodalomjegyzék **65**

Bevezetés

Egy matematika-fizika szakos tanár gyakorta szembesülhet azzal, hogy ha matematikaórán egy feladathoz kapcsolódóan előkerül a fizika, a diákok egy része elzárkózik, mondván az egy másik tantárgy; ugyanígy fizikaórán sem fogadják túlzott lelkesedéssel, ha például képletek rendezésekor vagy mértékegységek meghatározásakor matematikából tanult algebrai összefüggésekre hivatkozunk. Olykor a nem fizika szakos matematikatanárok között is tapasztalhatunk némi idegenkedést a fizikától. Pedig a matematika és a fizika nem egymástól élesen elkülönülő tantárgy, hanem éppen ellenkezőleg, a természettudomány két szorosan összefonódó területe. Ennek a hétköznapi ember számára is szembetűnő megnyilvánulása az, hogy a természeti jelenségeket a matematika segítségével írjuk le. Galilei szavait idézve (lásd [30, 216. oldal]):

> „A filozófia abban a nagy könyvben van írva, amely nyitva áll mindenkor szemeink előtt: az univerzumra gondolok; de nem olvashatjuk mindaddig, míg meg nem tanultuk a nyelvét, és nem barátkoztunk meg a jelekkel, amelyekkel írva van. A matematika nyelvén van írva, és betűi a háromszögek, körök, és más geometriai alakzatok, amelyek ismerete nélkül lehetetlen egyetlen szót is megérteni."

Ugyanakkor a matematika és a fizika között egy fordított irányú kapcsolat is fellelhető, mert számos elméleti matematikai probléma természettudományos kérdések vizsgálata során vetődött fel.

Ebben a szakdolgozatban fő célunk az, hogy néhány kevésbé ismert, de nagyon látványos példán keresztül rávilágítsunk arra, hogy milyen szoros kapcsolatban áll egymással a matematika és a fizika, nemcsak egyetemi, hanem már középiskolás szinten is. Ezáltal szeretnénk kicsit közelebb hozni egymáshoz a két tantárgyat diák és tanár számára egyaránt. Egy-egy konkrét témakör köré építve első látásra pusztán matematikai jellegűnek tűnő összefüggéseket ruházunk fel fizikai tartalommal és oldunk meg fizikai elvek mentén matematikafeladatokat. Az előkerülő témák jelentős része a középiskolai matematika és fizika középszintű vagy emelt szintű tananyagához jól illeszkedik, némelyikük szakköri foglalkozás keretében tárgyalható.

Az első fejezetben a tömegközéppont szemléletes fogalmából kiindulva mutatunk be nevezetes összegeket, a második fejezetben egyenáramú elektromos hálózatok segítségével igazolunk nevezetes közepek közötti és egyéb egyenlőtlenségeket, a harmadik fejezetben pedig az energiaminimum elvére támaszkodva oldunk meg szélsőérték-feladatokat.

A fejezetek utolsó szakaszában a tanítási vonatkozásokra térünk ki. Áttekintjük, hogy az adott fejezetekben szereplő matematikai és fizikai fogalmak megjelennek-e a különböző tantervekben, és ha igen, mely évfolyamok követelményei között. Ehhez kapcsolódóan mind matematikából, mind fizikából néhány tankönyvcsaládot is szemügyre veszünk és összevetjük a tárgyalásmódokat.

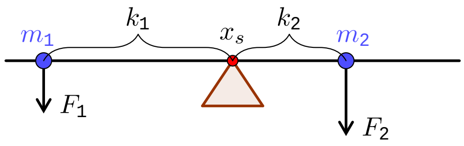
1. fejezet

Tömegközéppont és összegek

A fejezetben először a tömegközéppont szemléletes fogalmát vezetjük be, majd ennek segítségével érdekes, többségében a középiskolából is ismert összegeket adunk meg zárt alakban. Előkerül az első n pozitív egész szám összege, négyzetösszege, számtani sorozat összegképlete, továbbá binomiális együtthatókat tartalmazó összegek. Ezek első látásra mind tisztán matematikainak tűnő összefüggések, de – mint ahogy a következőkben kiderül – fizikai tartalommal ruházhatók fel. A középiskolából kevésbé ismert összefüggéseket pusztán matematikai úton is bebizonyítjuk. Ez a fejezet a [6] előadás felépítését követi, amelynek alapjául az [5] cikk eredményei szolgálnak.

1.1. Tömegpontok egy egyenesen

A legegyszerűbb egyensúlyi feladat, amelyet a gyerekek tapasztalati szinten már az óvodából ismernek, a mérleghinta egyensúlya. A Nemzeti Alaptanterv (NAT) szerint fizikából 7–8. osztályos tananyag a forgatónyomaték fogalma és egyszerű példákban az egyensúly vizsgálata. Ilyenkor az erőknek a forgástengelyre vett forgató hatását írjuk fel, melynek előjelét a feladathoz tartozó ábráról tudjuk leolvasni. Megállapodás szerint az óramutató járásával ellentétes irányt tekintjük pozitívnak. (Valójában ezeknél a példáknál nincs igazán jelentősége annak, hogy melyik a pozitív forgási irány). Például az 1.1. ábrán az x_s alátámasztási pontra nézve az F_1 erő pozitív irányú forgató hatást fejt ki, míg az F_2 negatívat (a forgástengely az x_s alátámasztási ponton átmenő, az ábra síkjára merőleges egyenes).



1.1. ábra. Mérleghinta egyensúlya

Az erők forgató hatását, a forgatónyomatékot (jele: M), úgy kaphatjuk meg, hogy az erő nagyságát (F) és az erőkart (k), vagyis az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolságát összeszorozzuk, azaz $M = F \cdot k$. Egyensúlyi helyzetben az ellentétes irányú forgató hatások kiegyenlítik egymást. Ennek alapján, ha az 1.1. ábrán látható mérleghinta egyensúlyban van, akkor

$$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2.$$

Mivel az F_1 erő az m_1 tömegpont súlyereje, ezért $F_1 = m_1 g$, ahol g a gravitációs gyorsulás. Hasonlóan $F_2 = m_2 g$, így az egyensúly előbbi feltétele a következő alakot ölti:

$$m_1 g \cdot k_1 = m_2 g \cdot k_2. \tag{1.1}$$

Tekintsünk a továbbiakban egy számegyenesként a mérleghinta rúdjára. Legyen x_s az alátámasztási pont koordinátája és rendre x_i az m_i tömegpont koordinátája $(i = 1, 2)$. Ekkor célszerű bevezetni az előjeles erőkar fogalmát, amely legyen az x_i pontbeli tömegpont esetében $x_s - x_i$. Ennek előjeléből következtethetünk arra, hogy az adott tömegpont az alátámasztási pont melyik oldalán van, és (csak lefelé ható erőket feltételezve) az előjelből adódik a forgató hatás iránya. Az egyensúly (1.1) feltétele az előjeles erőkarokkal a következőképpen írható fel:

$$m_1 g(x_s - x_1) = -m_2 g(x_s - x_2),$$

ahonnan átrendezéssel nyerjük, hogy

$$m_1 g(x_s - x_1) + m_2 g(x_s - x_2) = 0.$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy az $m_i g(x_s - x_i)$ előjeles forgatónyomatékok összege nulla. Ebből a feltételből x_s-et kifejezve megkapjuk, hogy a rendszert mely pontban kell alátámasztani ahhoz, hogy egyensúlyban legyen:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.2}$$

Ezt a pontot szokás az m_1, m_2 tömegpontokból álló rendszer *tömegközéppontjának* nevezni. Az előbbiek alapján ennek a pontnak lényeges tulajdonsága, hogy ott alátámasztva a rendszert az egyensúlyban van.

Érdemes megjegyezni, hogy a tömegközéppont helye független a számegyenes origójának megválasztásától. Ez szemléletesen világos, de a tömegközéppont (1.2) képletéből is levezethető. Ha az origót balra eltoljuk c-vel (ahol c R), akkor az m_1 tömegpont új $\tilde{x}_1$ koordinátája $x_1 + c$, hasonlóan $\tilde{x}_2 = x_2 + c$, és így az (1.2) képlet szerint a rendszer tömegközéppontja:

$$\tilde{x}_s = \frac{m_1 \tilde{x}_1 + m_2 \tilde{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(x_1 + c) + m_2(x_2 + c)}{m_1 + m_2} = x_s + c.$$

Ez azt jelenti, hogy $\tilde{x}_s$ éppen az eredeti x_s tömegközéppontnak az új koordinátája, tehát a tömegközéppont helye nem változott.

Ezek után helyezzünk n darab $(n \geq 1)$ tömegpontot a számegyenesre, legyen az m_i tömegpont koordinátája x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Az egyensúly feltétele most is az, hogy az előjeles forgatónyomatékok összege nulla:

$$m_1 g(x_s - x_1) + m_2 g(x_s - x_2) + \ldots + m_n g(x_s - x_n) = 0.$$

Ebből x_s-et kifejezve ismét megkapjuk az egyensúlyi alátámasztási pontnak, vagyis a rendszer tömegközéppontjának a helyét:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \tag{1.3}$$

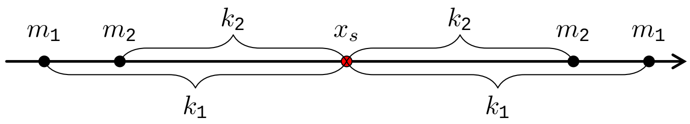
A két tömegpontból álló rendszerhez hasonlóan belátható, hogy a tömegközéppont független az origó megválasztásától.

A tömegközéppont meghatározásához néhány elv is segítségünkre van. A következő szakaszban több ilyen elvet fogalmazunk meg, majd alkalmazunk matematikai összefüggések fizikai szemléltetésére. További elvekről és azok alkamazásairól olvashatunk még a [19] cikkben.

1.1.1. Szimmetria, számtani sorozat, binomiális összegek

Az első elv a szimmetriáról szól.

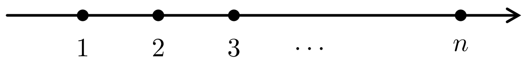
Elv (Szimmetria)**.** *Ha az alátámasztási ponttól azonos távolságra azonos tömegeket helyezünk el (lásd az 1.2. ábrát), a rendszer egyensúlyban van, hiszen az erők és az erőkarok is páronként megegyeznek. Ilyenkor a tömegközéppont egybeesik a szimmetria-középponttal, amely a két szélső tömegpont által meghatározott szakasz felezőpontja.*



1.2. ábra. Szimmetrikus elrendezés

Az első n pozitív egész összege

Egy speciális esetként tekintsük a számegyenest, és minden egész számhoz tegyünk egységnyi tömeget 1-től n-ig az 1.3. ábra szerint.



1.3. ábra. Egységnyi tömegpontok a számegyenesen

Ekkor a tömegközéppontot meghatározó (1.3) összefüggés szerint a rendszer tömegközéppontja:

$$x_s = \frac{1+2+\ldots+n}{n}.$$

A szimmetrikus elrendezés miatt szemléletesen a tömegközéppont az $[1, n]$ szakasz felezőpontja, tehát

$$x_s = \frac{1+n}{2}.$$

A tömegközéppont előbbi két alakját egybevetve az első n pozitív egész szám ismert összegképletét kapjuk.

1.1. Tétel. *Az első n pozitív egész szám összege:*

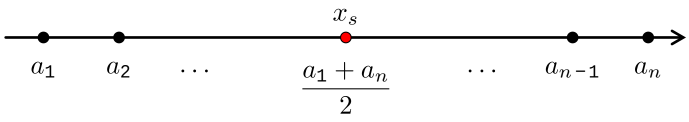
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Az előbbi gondolatmenet egy általánosítása, ha az egységnyi tömegpontokat nem az egymás utáni pozitív egész számokhoz helyezzük, hanem egy tetszőleges $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ számtani sorozat tagjaihoz az 1.4. ábra szerint.

Az egyensúlyi alátámasztási pont, a tömegközéppont, a szimmetria elve miatt szemléletesen most az $[a_1, a_n]$ szakasz felezőpontja, tehát $x_s = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$. Ugyanakkor a tömegközéppontot megadó (1.3) összefüggés alapján:

$$x_s = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Ez utóbbit a szimmetrián alapuló meggondolásból kapott alakkal összevetve és rendezve a számtani sorozat első n tagjának összegét nyerjük, amely a középiskola 12. osztályos tananyagából jól ismert.



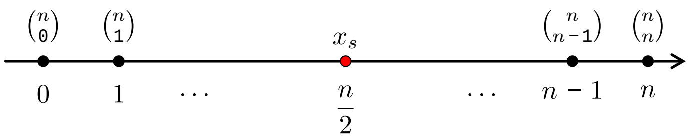
1.4. ábra. Számtani sorozat tagjaihoz helyezett egységnyi tömegek

1.2. Tétel. *Ha a_1, a_2, $\ldots, a_n$ egy számtani sorozat első n tagja, akkor az összegük:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Összegek binomális együtthatókkal

További összegekhez úgy is eljuthatunk, hogy nem a tömegpontok helyét, hanem magukat a tömeget változtatjuk meg. Tegyünk az i egész számhoz ($i = 0, \ldots, n$) rendre $\binom{n}{i}$ tömegeket az 1.5. ábra szerint.



1.5. ábra. Binomiális együtthatókkal megegyező tömegek a számegyenesen

Ha az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatóra úgy tekintünk, mint egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számára, akkor a k elemű és $n-k$ elemű részhalmazokat a komplementerképzés műveletével párba állítva adódik a binomiális együtthatók szimmetrikus tulajdonsága:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.4}$$

Ezt a szimmetriát felhasználva látható, hogy az 1.5. ábrán vázolt rendszer tömegközéppontja a $[0, n]$ szakasz felezőpontja, tehát $x_s = \frac{n}{2}$. Ugyanakkor a tömegközéppont helyét meghatározó (1.3) összefüggés alapján:

$$x_s = \frac{\binom{n}{0} \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot 1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot (n-1) + \binom{n}{n} \cdot n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}.$$

Az előbb felírt tört nevezőjében egy n elemű halmaz nullaelemű, egyelemű, kételemű stb. n elemű részhalmazai számának összege, vagyis az összes részhalmazainak száma szerepel. Ez nem más, mint 2^n, hiszen az alaphalmaz mindegyik eleméről egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy az adott részhalmazba belevesszük-e vagy sem. Ezek után a tömegközéppontnak az elrendezés szimmetriájából és az egyensúlyi feltételből adódó két alakját összevetve:

$$\frac{n}{2} = \frac{\binom{n}{1} \cdot 1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot (n-1) + \binom{n}{n} \cdot n}{2^n}.$$

Ezt átrendezve egy, a binomiális együtthatókkal kapcsolatos szép azonosságot kapunk.

1.3. Állítás. *Legyen n egy pozitív egész szám. Ekkor:*

$$\binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1}(n-1) + \binom{n}{n}n = n2^{n-1}.$$

Bizonyítás. A matematikai bizonyítást a kettős leszámlálás módszerével végezzük a következő kombinatorikai feladaton keresztül. Hányféleképpen lehet egy n fős társaságból egy legalább egy fős küldöttséget és a küldöttség tagjai közül egy vezetőt választani?

Egy n fős társaságból egy k fős küldöttséget pontosan $\binom{n}{k}$ módon lehet kiválasztani, a kiválasztott k fős küldöttségből pedig egy vezetőt k-féleképpen lehet választani. Így k fős küldöttségre a vezetővel együtt összesen $k\binom{n}{k}$ lehetőség van. Ezt $k = 1$-től $k = n$-ig összegezve a bizonyítandó összefüggés bal oldalán álló kifejezést kapjuk, amely ezek szerint a lehetséges küldöttségek száma.

A bizonyítandó összefüggés jobb oldala a küldöttségek leszámlálásának egy másik módja. Itt először az n emberből választunk egy vezetőt, ezt n féleképpen tehetjük meg. Majd ezek után választunk hozzá küldöttséget úgy, hogy a társaság összes többi tagjáról egyesével eldöntjük, hogy bekerüljön-e a küldöttségbe vagy sem. Ez összesen $n - 1$ döntés, melyek egymástól függetlenek, vagyis 2^{n-1} lehetőség. Tehát $n2^{n-1}$ módon választható küldöttség egy vezetővel együtt. □

Ahogy korábban az egyforma tömegeket nemcsak az egész számokhoz, hanem egy számtani sorozat tagjaihoz helyeztünk, úgy ezt a binomiális tömegekkel is megtehetjük. Legyen a_0, a_1, $\ldots, a_n$ egy számtani sorozat és az i-edik tagjához helyezzünk $\binom{n}{i}$ tömeget. A binomiális együtthatók szimmetriája alapján a tömegközéppont az $[a_0, a_n]$ szakasz felezőpontja, tehát $x_s = \dfrac{a_0 + a_n}{2}$. Másrészt a tömegközéppontot meghatározó (1.3) összefüggés szerint:

$$x_s = \frac{\binom{n}{0} \cdot a_0 + \binom{n}{1} \cdot a_1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a_{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a_n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}.$$

A két alakból a következő azonosságot kapjuk.

1.4. Állítás. *Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ egy tetszőleges számtani sorozat, ahol n nemnegatív egész. Ekkor:*

$$\binom{n}{0}a_0 + \binom{n}{1}a_1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a_{n-1} + \binom{n}{n}a_n = (a_0 + a_n)2^{n-1}.$$

Bizonyítás. Ismert, hogy a számtani sorozat k-adik tagja $a_k = a_0 + kd$, ahol d a számtani sorozat differenciája. Ennek felhasználásával a bizonyítandó összefüggés bal oldala a következőképpen alakítható át:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(a_0 + kd) = a_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + d \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = a_0 2^n + dn2^{n-1},$$

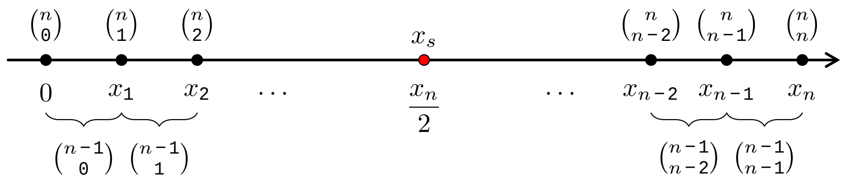
ahol felhasználtuk a binomiális együtthatók összegére vonatkozó összefüggést, valamint az 1.3. állítást. Mivel

$$a_0 2^n + dn2^{n-1} = 2^{n-1}(2a_0 + nd) = 2^{n-1}(a_0 + (a_0 + nd)) = 2^{n-1}(a_0 + a_n),$$

ezért valóban

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = (a_0 + a_n)2^{n-1}.$$

□



1.6. ábra. Duplán szimmetrikus elrendezés

Egy további szimmetrikus elrendezésként tekintsük az 1.6. ábrát! A binomiális együtthatókkal megegyező tömegeket most úgy helyeztük el a számegyenesen, hogy köztük a távolság is a megfelelő binomiális együtthatók értékével egyezzen meg, pontosabban, az x_k pontba $\binom{n}{k}$ tömeget helyeztünk, ahol $x_0 = 0$ és $x_k - x_{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ $(1 \le k \le n)$. Ekkor:

$$\begin{cases} x_k = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1}, \text{ ha } 1 \le k \le n-1, \\ x_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}. \end{cases}$$

A binomiális együtthatók szimmetriája miatt a tömegek és az erőkarok is páronként megegyeznek, ezért a rendszer tömegközéppontja a $[0, x_n]$ szakasz felezőpontja, azaz $x_s = \dfrac{x_n}{2}$. Másrészt a tömegközéppontra vonatkozó (1.3) összefüggés alapján:

$$x_s = \frac{\binom{n}{0}x_0 + \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}x_2 + \ldots + \binom{n}{n}x_n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}},$$

ahol a nevezőben lévő összeg zárt alakja 2^n. A tömegközéppont két alakját összevetve a következő állítást kapjuk.

1.5. Állítás. *Legyen n pozitív egész szám. Ekkor:*

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{0} + \binom{n}{2}\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \ldots + \binom{n}{n}\left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right] = 2^{2n-2}.$$

Bizonyítás. Ismét a kettős leszámlálás módszerét fogjuk alkalmazni, mégpedig a következő kombinatorikai feladatban. Legyen egy $2n-1$ fős osztályban n lány és $n-1$ fiú. Hányféleképpen lehet közülük egy olyan legalább egy fős csapatot kiválasztani, amelyben több lány van, mint fiú?

Ha a csoportban pontosan egy lány van, akkor a lány tagra $\binom{n}{1}$-féle lehetőség van, és a csapatba fiút már nem választhatunk. Ha pontosan két lányt választunk a csapatba, arra $\binom{n}{2}$ lehetőség van, melléjük pedig vagy választunk fiút, vagy sem, ami $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}$ lehetőséget jelent. Általában, ha pontosan k lány van a csapatban, akkor ez rájuk nézve $\binom{n}{k}$ lehetőség, és melléjük 0 vagy 1 vagy 2 stb. vagy $k-1$ fiút választhatunk, ami összesen $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1}$ lehetőség. Így egy k fős csapatra $\binom{n}{k}\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1}\right]$ lehetőség van, tehát a feltételnek megfelelő összes lehetséges csapatok száma a bizonyítandó összefüggés bal oldala.

Ha a bizonyítandó azonosság jobb oldalát nézzük, az egy $2n-1$ elemű halmaz részhalmazai számának fele. A részhalmazok megfelelnek egy-egy csapat kiválasztásának, de ezek közül a feltételnek csak azok tesznek eleget, melyben több lány van, mint fiú. Legyen az osztály egy részhalmazában

L lány és F fiú. Ha ez a részhalmaz nem tesz eleget a feladat feltételének, akkor $L \leq F$, ami egyenértékű azzal, hogy

$$L < F + 1. \tag{1.5}$$

Ekkor a komplementerhalmaz már a feltételeknek megfelelő csapatot határoz meg, ugyanis abban $L \ = n - L$ lány és $F \ = n - 1 - F$ fiú van, így (1.5) ekvivalens módon úgy írható, hogy

$$F \ = n - 1 - F < n - L = L \ .$$

Tehát a komplementerképzéssel a feltételnek eleget tevő és eleget nem tevő csapatok párba állíthatók, ezért az összes lehetséges csapat közül pontosan a fele a feladat feltételének megfelelő, ami $\frac{1}{2}2^{2n-1} = 2^{2n-2}$ lehetőséget jelent, ami éppen ez a bizonyítandó összefüggés bal oldala. □

1.1.2. Összevonási elv és a négyzetszámok összege

Elv (Összevonás). *Ha néhány tömeget a saját tömegközéppontjukba összevonunk, az összevonás után kapott rendszer tömegközéppontja megegyezik az eredeti rendszer tömegközéppontjával.*

Az elv igazságát egy konkrét példán illusztráljuk. Legyen a számegyenesen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tömeg. Írjuk fel a tömegközéppontot megadó (1.3) összefüggést egy kicsit részletesebben:

$$x_s = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_n}.$$

Vonjuk össze például az x_1, x_2, x_3 helyen lévő tömegeket a tömegközéppontjukba, azaz tegyünk helyettük $m_1 + m_2 + m_3$ tömeget a $\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$ pontba. Az összevonás utáni rendszer tömegközéppontját az (1.3) összefüggés adja meg, amely most a következő alakot ölti:

$$x_s = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} + m_4x_4 + \ldots + m_nx_n}{(m_1 + m_2 + m_3) + m_4 + \ldots + m_n}.$$

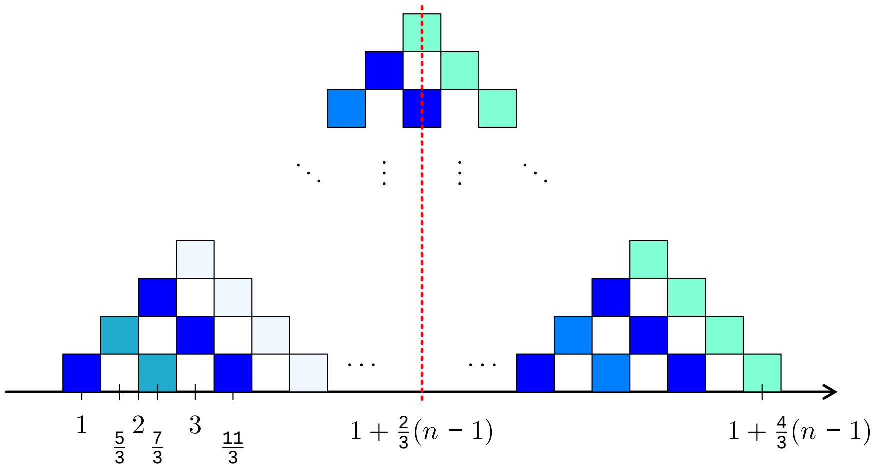
A zárójelek felbontásával világosan látható, hogy az összevonás utáni rendszer tömegközéppontja meggyezik az összevonás előtti rendszer tömegközéppontjával.

Az összevonási elvet egy olyan elrendezésben használjuk, melyben a tömegeket úgy képzeljük el, mintha egy piramist építenénk belőlük. Azaz helyezzünk el az 1.7. ábra szerint egységnyi tömegeket oly módon, hogy az első sorban n darab legyen, a következőben $n - 1$, majd így tovább a csúcsig, amelyben egyetlen tömeg lesz már csak (a különféle kék árnyalatú kis négyzetek jelképezik a tömegeket.) Valójában az elrendezés nem piramis, hanem az 1-hez teszünk egy egységnyi tömeget, az $\frac{5}{3}$-hoz is egyet, a $\frac{7}{3}$-hoz két egységnyit, a 3-hoz is két egységnyit stb.

A kapott rendszer tömegközéppontja a szimmetrikus elrendezés miatt az $\left[1, 1 + \frac{4}{3}(n - 1)\right]$ szakasz felezőpontja:

$$x_s = \frac{1 + 1 + \frac{4}{3}(n - 1)}{2} = 1 + \frac{2}{3}(n - 1).$$

Most vonjuk össze a tömegeket, mégpedig „átlósan” a színek szerint. Az első átlóban egyetlen tömeg van az 1-hez elhelyezve, tehát ennek a rendszernek a tömegközéppontja az 1-nél van. A következő átlóban két tömeg van, melyek a 2-es bal és jobb oldalán szimmetrikusan helyezkednek el, tehát ez a rendszer egy, a 2-höz elhelyezett 2 egységnyi tömeggel helyettesíthető. A 3-hoz a három hosszú átlóban lévő tömegeket tudjuk összevonni, melyből a középső éppen a 3-ban van, míg a két



1.7. ábra. Tömegekből épített „piramis”

szélső erre szimmetrikusan helyezkedik el. Ezt folytatva az utolsó átlóban, mely tulajdonképp a piramis teljes jobb oldala, éppen n egységnyi tömeg van, melyek tömegközéppontja n-nél van. Tehát az összevonás után a k koordinátájú pontban éppen k tömeg van, vagyis az összevonással keletkezett rendszer tömegközéppontja:

$$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + n \cdot n}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}.$$

Az összevonás utáni rendszer tömegközéppontja megegyezik az eredeti rendszer tömegközéppontjával, amiből:

$$1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + n \cdot n}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}.$$

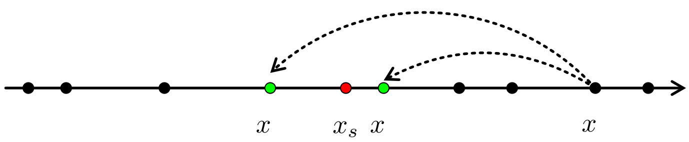
Az iménti egyenlet jobb oldalán a számláló az első n négyzetszám összege. A nevezőben az első n pozitív szám összege áll, melyet az 1.1. tétel alapján is felírhatunk. Rendezés után az első n pozitív egész szám négyzetének összegére vonatkozó jól ismert összefüggés adódik.

1.6. Tétel. *Az első n pozitív egész szám négyzetének összege:*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.1.3. Átpakolási elv és a Csebisev-egyenlőtlenség

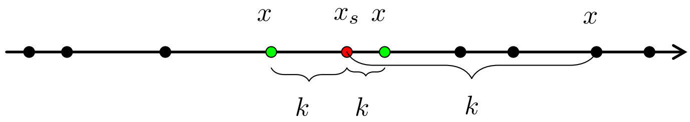
Tekintsük ismét a számegyenest és rajta tömegpontokat, jelölje a rendszer tömegközéppontját x_s. A fejezet elején megfogalmaztuk, hogy az x_s pontban alátámasztva a rendszer egyensúlyban van. Válasszunk ki egy tetszőleges tömegpontot, mondjuk a tömegközéppont jobb oldalán, az 1.8. ábrán az x helyen lévő tömegpontot választottuk. Ha ezt a tömeget a számegyenesen balra eltoljuk, kétféle eset lehetséges (feltéve, hogy az x helyen lévő tömeg pozitív).



1.8. ábra. Átpakolás

1. A kiválasztott tömeg új helye továbbra is a tömegközépponttól jobbra van (az 1.8. és az 1.9. ábrán az x helyen): ilyenkor a tömegpont új helyéhez tartozó erőkar kisebb, mint az eredeti helyhez tartozó erőkar (az 1.9. ábrán $k < k$), ezáltal a képzeletbeli mérleg balra elbillen.

2. A kiválasztott tömeg új helye a tömegközépponttól balra van (az 1.8. és az 1.9. ábrán x helyen): ilyenkor az új helyhez tartozó forgató hatás a korábbi helyzethez képest ellentétes előjelűvé válik, és így a mérleg ismét balra billen.



1.9. ábra. Erőkarok az átpakolás előtt és után

Hasonló meggondolással adódik, hogy ha az alátámasztási pont bal oldalán lévő tömeget tolunk balra, akkor a hozzá tartozó erőkar nagyobbá válik, és az előbb elképzelt mérleg balra fog lebillenni. Ahhoz, hogy ismét egyensúlyba kerüljön a rendszer, az eredeti x_s tömegközépponttól balra kell alátámasztani. Mindezek alapján a következő elvet fogalmazhatjuk meg.

Elv (Átpakolás)**.** *Ha egy tömegpontot balra arrébb pakolunk, akkor a rendszer tömegközéppontja is balra fog tolódni vagy helyben marad. Ha pedig egy tömegpontot jobbra arrébb pakolunk, akkor a tömegközéppont is jobbra tolódik vagy helyben marad.*

Az átpakolási elv alkalmazásaként legyen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ és $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ úgy, hogy $m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 0$, és tegyünk az x_i pontba m_i tömeget. Pakoljunk át tömegeket jobbról balra úgy, hogy minden x_i pontban azonos tömeg, az össztömeg n-ed része legyen; pontosabban, azokból a pontokból, ahol az átlagnál több tömeg van, onnan a „felesleget” tegyük át olyan pontokba, ahol az átlagnál kevesebb tömeg van. Az eredeti elrendezés tömegközéppontját az (1.3) összefüggés adja meg, az átpakolás után pedig egy szimmetrikus elrendezéshez jutunk, így a tömegközéppont: $x_s = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Az átpakolási elv miatt a tömegközéppont balra tolódik, azaz az eredeti és az új tömegközéppont koordinátája között fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Ezt átrendezve az úgynevezett Csebisev-egyenlőtlenséget kapjuk abban a speciális esetben, amikor $m_1 + \ldots + m_n > 0$.

1.7. Tétel. *Ha* $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ *és* $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ *valós számok, akkor*

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \leq n(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ *vagy* $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$.

Bizonyítás. Tekintsük a következő összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (m_i - m_j)(x_i - x_j). \tag{1.6}$$

Mivel az (x_k) és (m_k) számsorozat egyaránt monoton növekvő, ezért az előbbi összeg minden tagjában a két szorzótényező előjele azonos. Ennek következményeként nemnegatív számokat adunk össze, tehát maga az összeg is nemnegatív. A zárójelek felbontásával így a következő egyenlőtlenséget nyerjük:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i x_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_j x_i. \tag{1.7}$$

A jobb oldal első tagjában az összegzés sorrendjének felcserélésével kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i x_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right) = n\sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Hasonlóan:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = n\sum_{j=1}^{n} m_j x_j.$$

Végül pedig

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i x_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

hiszen a jobb oldalon a szorzást tagonként elvégezve az összes lehetséges kéttényezős $m_i x_j$ szorzatot kapjuk, és éppen ez áll a bal oldalon. Mindezek alapján az (1.7) egyenlőtlenség a következő ekvivalens alakot ölti:

$$0 \leq 2n\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

amelyből a tétel állítása közvetlenül adódik.

Mivel az (1.6) összeg minden tagja nemnegatív, az összeg pontosan akkor nulla, ha minden tag nulla, melyek közt

$$(m_n - m_1)(x_n - x_1) = 0$$

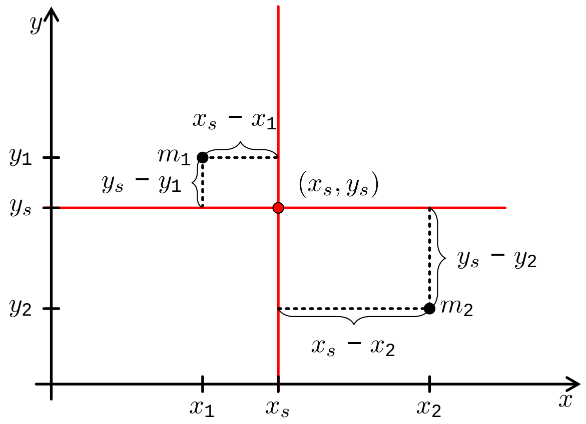
is teljesül. Ez pontosan akkor nulla, ha $m_n = m_1$ vagy $x_n = x_1$. Ekkor az (m_k) és (x_k) sorozatok monoton növekedése miatt szükségképpen $m_1 = \ldots = m_n$ vagy $x_1 = \ldots = x_n$, és ez elegendő ahhoz, hogy az (1.6) összeg minden tagja nulla legyen. □

1.2. Tömegpontok a síkon

Tömegeket természetesen nemcsak egy egyenesre lehet helyezni, hanem eggyel több dimenzióba lépve egy síkra is. Ahogy eddig a számegyenesre mint elhanyagolható tömegű rúdra tettünk tömegeket, most vegyünk egy elhanyagolható tömegű síkot és erre a síkra rakjunk tömegeket, és képzeljük úgy, hogy a nehézségi erő a síkra merőleges irányú. A számegyenesen elhelyezett tömegpontok rendszerét az x_s tömegközéppontban alátámasztva azt tapasztaltuk, hogy egyensúlyban van, ennek mintájára a síkon is meghatározhatjuk azt a pontot, melyben alátámasztva egyensúlyban van a rendszer.

Rögzítsünk a síkra egy derékszögű koordináta-rendszert az 1.10. ábra szerint és jelölje (x_s, y_s) azt a pontot, amelyben alátámasztva a rendszer egyensúlyban van.

Egy tömegponthoz most két erőkar is tartozik, egy az (x_s, y_s) ponton átmenő, az x tengellyel párhuzamos egyenesre mint forgástengelyre vonatkoztatva és egy az ezen a ponton átmenő, az y tengellyel párhuzamos egyenesre mint forgástengelyre vonatkoztatva. Például az 1.10. ábrán az y tengellyel párhuzamos egyenesre vonatkozóan az (x_1, y_1) pontban lévő m_1 tömegpont előjeles



1.10. ábra. Tömegpontok derékszögű koordináta-rendszerben

erőkarja $x_s - x_1$, az (x_2, y_2) pontban elhelyezett m_2 tömegponté pedig $x_s - x_2$. Ezzel lényegében visszakaptuk a fejezet elején tárgyalt mérleghinta esetét, és így

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Az x tengellyel párhuzamos egyenesre mint tengelyre vonatkozó egyensúly feltételéből hasonlóan adódik, hogy

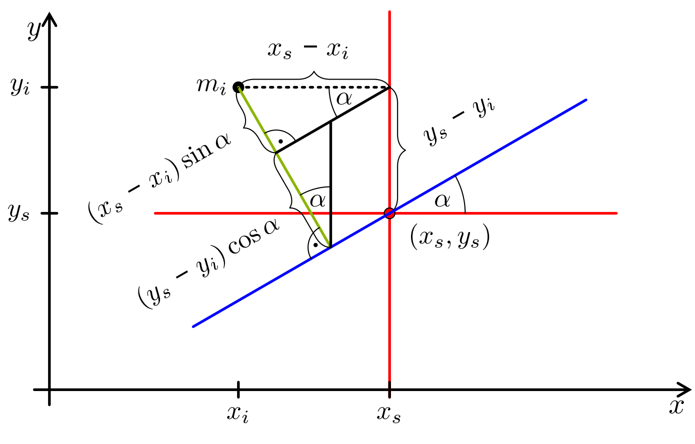
$$y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Tehát kissé leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a kétdimenziós rendszer tömegközéppontjának koordinátáit úgy kaphatjuk meg, hogy „koordinátánként vesszük a tömegközéppontot”.

Az általános esetben teljesen hasonlóan adódik a rendszer tömegközéppontjának két koordinátája. Legyen az (x_i, y_i) pontban m_i tömeg. Ekkor a tömegközéppont (x_s, y_s) koordinátáit az alábbi módon kaphatjuk meg:

$$(x_s, y_s) = \left(\frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + \ldots + m_n} \right). \tag{1.8}$$

1.8. ***Megjegyzés.*** Belátható, hogy ha a rendszer az 1.11. ábrán pirossal jelölt tengelyekre nézve egyensúlyban van, akkor az (x_s, y_s) ponton áthaladó bármely egyenesre mint tengelyre nézve is egyensúlyban van. Tekintsük például a kékkel jelölt, x tengellyel α szöget bezáró egyenest és írjuk



1.11. ábra. Tetszőleges tengelyre vonatkozó erőkarok fel erre a tengelyre vonatkozóan egy tetszőleges m_i tömegponthoz tartozó előjeles erőkart, ami az ábrán a zöld színnel jelölt szakasz hossza. A berajzolt derékszögű háromszögekről látható, hogy az előjeles erőkar $(x_s - x_i)\sin\alpha + (y_s - y_i)\cos\alpha$. Mivel a rendszer a pirossal jelölt egyenesekre mint tengelyekre nézve egyensúlyban van, ezért:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_s - x_i) = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(y_s - y_i) = 0,$$

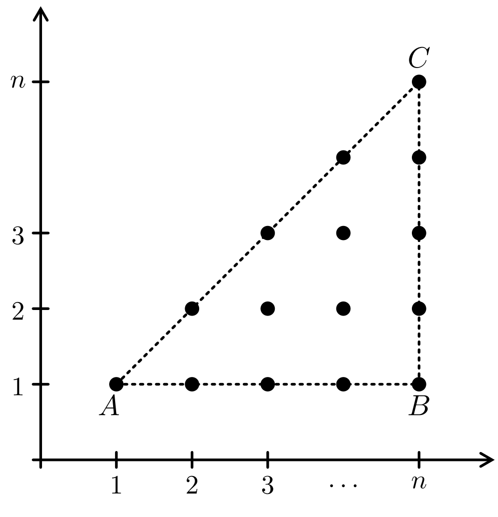
tehát

$$\sum_{i=1}^{n}\big((x_s - x_i)\sin\alpha + (y_s - y_i)\cos\alpha\big) = \sin\alpha\sum_{i=1}^{n} m_i(x_s - x_i) + \cos\alpha\sum_{i=1}^{n} m_i(x_s - x_i) = 0$$

is teljesül, azaz a kék egyenesre mint tengelyre vonatkoztatva is egyensúlyban van.

1.2.1. Az első n négyzetszám összege

A [32] és a [27] cikkek alapján helyezzünk el egységnyi tömegeket egy háromszögben az 1.12. ábra szerint. Legyen a háromszög három csúcsa rendre $A = (1, 1)$, $B = (n, 1)$, illetve $C = (n, n)$. A tömegközéppont meghatározásához az elrendezés minden vízszintes sorában vonjuk össze a tömegpontokat. Egy sor tömegközéppontja az abban a sorban lévő két szélső tömegpont által meghatározott szakasz felezőpontja, tehát ezek rajta vannak a C csúcsot az AB oldal felezőpontjával összekötő szakaszon, vagyis a háromszög AB oldalához tartozó súlyvonalán. Ha az iménti összevonást a függőleges oszlopokra is elvégezzük, ehhez hasonlóan azt kapjuk, hogy a tömegközéppont a háromszög BC oldalához tartozó súlyvonalán is rajta van. Ebből következik, hogy a tömegközéppont a súlyvonalak metszéspontjában kell hogy legyen. A geometriában a súlyvonalak metszéspontját szokás súlypontnak nevezni, amely most egybeesik a rendszer tömegközéppontjával.



1.12. ábra. Háromszög alakban elhelyezett tömegek

Határozzuk meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit koordináta-geometriai úton. Mivel a háromszög CB oldalának felezőpontja $\left(n, \frac{n+1}{2}\right)$, ezért az A csúcsból induló súlyvonal egy irányvektora $\underline{v}_A = \left(n - 1, \frac{n-1}{2}\right)$ és hasonlóképpen a C csúcsból induló súlyvonal egy irányvektora $\underline{v}_C = \left(\frac{n-1}{2}, n - 1\right)$. Mivel az irányvektornak csak az iránya lényeges, könnyebb a $\underline{v}_A = (2, 1)$ és a $\underline{v}_C = (1, 2)$ vektorokkal számolni. A súlyvonalak egyenesének irányvektoros egyenletét felírva a következő egyenletrendszert kapjuk a metszéspontjukra:

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x - y = n. \end{cases}$$

Ezt megoldva (legegyszerűbb talán az első egyenletből x-et kifejezni és behelyettesíteni a második-ba) megkapjuk a háromszög súlypontjának koordinátáit:

$$(x_s, y_s) = \left(\frac{2n+1}{3}, \frac{n+2}{3} \right).$$

Minthogy a súlypont megegyezik a tömegközépponttal, annak koordinátáit az (1.8) képlet alapján is megkaphatjuk. Szorítkozzunk csak az első koordinátára, ekkor mivel egységnyi tömegekről van szó, ezért x_s számlálójában összegeznünk kell a pontok első koordinátáit. Az 1 helyen egy darab tömeg van, a 2 helyen két darab, stb., általában a k helyen k darab, ezért x_s számlálója:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n.$$

A nevezőben az össztömeg szerepel, ez a pontok száma, ami

$$1 + 2 + \ldots + n,$$

hiszen az első sorban 1, a másodikban 2, stb., az utolsó sorban n darab tömeg található. Végeredményben tehát:

$$x_s = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n}{1 + 2 + \ldots + n}.$$

Ezt összevetve a súlypont koordináta-geometriai úton nyert első koordinátájával azt kapjuk, hogy

$$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot n}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{2n+1}{3}.$$

Ha a nevezőben lévő első n pozitív szám összegével átszorzunk, az első n pozitív egész szám négyzetének összegét kapjuk az 1.6. tétel állításával megegyezően:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.3. Módszertani kitekintés

Ebben a szakaszban áttekintjük, hogy a fejezetben előforduló fogalmak milyen módon jelennek meg a középiskolai matematika- és fizikaoktatásban. Először a tantervi illeszkedést vizsgáljuk meg, majd néhány tankönyvi kapcsolódási pontot emelünk ki.

1.3.1. Kerettantervi illeszkedés

Fizika. A fejezetben előforduló fogalmak: erő, egyensúly, forgatónyomaték, tömegközéppont.

A középiskolai tanulási, fejlesztési célokat, műveltségi tartalmakat a 2013. szeptember 1-jén hatályba lépett Nemzeti Alaptanterv (NAT, [37]) alapozza meg, a tananyag tartalmának pontos meghatározása pedig az iskola helyi képzési sajátosságait figyelembe vevő kerettantervekben ([39], [38]) jelenik meg. A NAT műveltségi területeit tekintve a fizika az Ember és Természet részhez tartozik. Fizikából két kerettanterv létezik, egy A és egy B változat, melyek óraszámban és a tananyag célját tekintve is eltérnek egymástól. A fizika tárgy mindkét esetben az általános iskola 1–4. osztályában tanított Környezetismeret, illetve az 5–6. osztályban tanított Természetismeret tantárgy szerves folytatása. Az A változat óraszáma kisebb, inkább a fizikai szemlélet kialakítását, mindennapi jelenségek felismerését, megértését tűzi ki céljául; a B változat pedig a nagyobb óraszám és részletesebb, bővebb tananyag által lehetővé teszi a műszaki, technikai ismeretek elsajátítását, ezáltal előkészítve a továbbtanulást és a tehetséggondozást.

Az A kerettantervben a 7–8. évfolyamon a forgatónyomaték mint fogalom nem szerepel, de 9–10. évfolyamon az egyszerű gépekhez kapcsolódva megjelenik az egyensúly feltétele, ahol a tanulótól elvárt ismeret a súlypont, súlyvonal fogalma, annak megkeresése szerkesztéssel vagy méréssel, számolással. A matematikához kapcsolódóan a vektorok fogalma kerül elő, hiszen az erő vektormennyiség, és amennyiben a test több erő hatása alatt van egyensúlyban, szükség van a vektorok összeadására.

A B kerettantervben 7–8. évfolyamon már megtalálható a forgatónyomaték és erőegyensúly fogalma, amely kiegészül még az egyszerű gépek működési alapjaival. A fizika kerettanterv spirális felépítése miatt a forgatónyomaték fogalma 9–10. évfolyamon ismét előjön, mégpedig a kiterjedt merev test egyensúlyához kapcsolódóan. Elvárás a merev test egyensúlyának mind az erők, mind a forgatónyomatékok összegére vonatkozó feltételének ismerete, valamint szerepel a tömegközéppont fogalma is.

A fizikaoktatásban van egy kettősség a súlypont és tömegközéppont fogalma között, a B kerettanterv a tömegközéppont fogalmát használja csak, az A kerettantervben ez nem szerepel, csak a súlypont jelenik meg. Homogén test tömegközéppontja azonos a súlypontjával, csupán más tulajdonság alapján határozzuk meg azt a pontot. A tömegközéppont inkább dinamikai fogalom, a test mozgásának leírásakor fontos, a súlypont pedig inkább sztatikában használatos kifejezés, mely azt fejezi ki, hogy amely pontban alátámasztva van egyensúlyban az adott test vagy rendszer.

Matematika. A fejezetben előforduló fogalmak: súlypont, számtani sorozat, számtani sorozat első n tagjának összege, binomiális együttható fogalma és tulajdonságai, Csebisev-egyenlőtlenség.

Matematikából a 9–12. évfolyam számára három kerettantervet is kidolgoztak a NAT előírásai mentén, egy középszintű matematikaoktatáshoz igazítottat és két nagyobb óraszámú kerettantervet is azon iskolák számára, ahol a matematikát emelt szinten szeretnék tanítani. Az általános iskolai matematika kerettantervben a sorozatok már első osztályban előfordulnak, ahol megadott szabályok alapján kell egy adott sort, mintát folytatni. Ezen bevezető feladatok elsődleges célja a szabályok felismerése, követése. A számsorozatok 5–6. évfolyamon bukkannak fel újra, bár még ekkor is nagyrészt sorozatok megalkotása, szabályok felismerésének fejlesztése a cél. A 7–8. évfolyamon is szerepelnek sorozatok a tantervben, itt jelenik meg először a számtani sorozat fogalma és a sorozat tagjai közti összefüggések (sorozat n-dik tagja, a sorozat első n tagjának összege). A témakör tovább bővül a 11–12. évfolyamon, ahol a sorozatok külön 15 órára tervezett témakört alkotnak, mely a mértani sorozatot és a rekurzív sorozatokat is magába foglalja.

A binomiális együtthatók a 11–12. évfolyamon szerepelnek először. Maga a binomiális együttható fogalma és elnevezése az ismétléses kombinációval kapcsolatosan középszinten is tananyag, azonban a binomiális együtthatók tulajdonságai, összegei csak kiegészítő, illetve emelt szintű anyagrész. A fejezetben bemutatott Csebisev-egyenlőtlenség nem szerepel az alapszintű matematika kerettanterv követelményei között, de az emelt szintű A változat egy 15 órás tematikai egységet szán a nevezetes egyenlőtlenségekre, oda beilleszthető, ha jut rá idő.

Bár csak az 1.8. megjegyzésben került elő, mégis a fejezethez tartozik a derékszögű háromszög oldalainak meghatározása szögfüggvények segítségével. Ez a középszintű matematika tanterv szerint 9–10. évfolyamon tananyag, akkor kerül bevezetésre a szögfüggvények (szinusz, koszinusz, tangens, kotangens) fogalma, illetve alkalmazása derékszögű háromszögben. Először csak hegyesszögek szögfüggvényeit értelmezzük, majd forgásszögek szögfüggvényeiként terjesztjük ki.

A fizikaoktatás egyik nagy problémája, hogy a tárgy több matematikai háttérismeretet igényelne, mint ahol éppen akkor a matematika tanterv szerint tartanak a tanulók. Már egy egyszerű lejtőn lecsúszó test esetében sem kerülhető meg a hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazása és a vektorok felbontása, mikor a testre ható erőket bontjuk fel lejtővel párhuzamos és merőleges összetevőkre, hogy meghatározhassuk a test mozgását. Sok helyen ezért matematikából előrébb hozzák ezeket a témaköröket.

1.3.2. Tankönyvi kapcsolódások

Fizika A Mozaik Kiadó [8], illetve az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet (OFI) által kiadott [34] fizikatankönyvek a fizika B kerettantervnek megfelelően készültek, így mindkét tankönyvcsaládban már a 7. évfolyamon tárgyalják a forgatónyomatékot, erők egyensúlyát. Tehát az ebben a fejezetben felhasznált fizikai összefüggéseknek, fogalmaknak már egy B kerettanterv szerint tanuló 7–8. osztályos tanuló birtokában van. Az 1.1. feladathoz hasonlóakat mindkét tankönyv ad fel gyakorlásnak.

Matematika. A Hajdu Sándor által szerkesztett tankönyvcsalád 12. évfolyamosok számára írt [16] matematikakönyvében az első n pozitív egész szám összegképlete bizonyítással együtt szerepel példaként a teljes indukció módszerére. Ehhez kapcsolódóan tárgyalja az első n pozitív egész szám négyzetének összegét is, azonban ezt már kiegészítő anyagként jelzi a könyv. A binomiális együttható fogalma egy későbbi fejezetben az ismétlés nélküli kombináció és a részhalmazok számának meghatározásakor jön elő. Az alap definíción és jelölésen túl minden binomiális együtthatókkal kapcsolatos összefüggés, tulajdonság kiegészítő, emelt szintű tananyag. A tankönyv ezt a következő feladatban tűzi ki: Bizonyítsuk, hogy $\binom{n}{k}$ mindig természetes szám, minden $n > 0$ egész szám esetén $\binom{n}{0} = 1$ és $\binom{n}{n} = 1$, a binomiális együtthatók (1.4) összefüggéssel megfogalmazott szimmetrikus és

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

alakban írható additív tulajdonsága teljesül, továbbá

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 2^n. \tag{1.9}$$

A legutolsó állítás igazolása a kettős leszámlálás módszerével is történhet, melyet a dolgozatban többek között az 1.3. és az 1.5. állítások bizonyítása során alkalmaztunk.

A Sokszínű Matematika tankönyvcsalád 11. osztályosoknak szóló [12] kötetében a kombinatorika témakörében az ismétlés nélküli kombinációhoz kapcsolódóan jelenik meg a binomiális együttható fogalma. Érdekesség, hogy az előbb említett Hajdu-féle tankönyvhöz képest sokkal több anyagot tárgyal a binomiális együtthatókkal kapcsolatosan. Kimondja a binomiális tételt, illetve a következő két összeget is tétel formájában:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n,$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0,$$

amelyek közül az elsőt egy n elemű halmaz részhalmazainak leszámlálásával bizonyítja. A fejezet végén emelt szintű tananyagrészként mutat példákat az ismétléses kombinációra.

Az Oktatáskutató és Feljesztő Intézet által kiadott Újgenerációs matematika tankönyvcsalád 11. osztályos [3] tankönyvében vezeti be a binomiális együttható fogalmát. Ebben a tankönyvben (más évfolyamokon, más témakörökhöz kapcsolódóan is) több példa épül a számológép-használatra, például a 90. oldal 4. feladata számológéppel kiszámolva kérdezi a $\binom{11}{2}, \binom{11}{3}, \binom{11}{4}, \binom{11}{7}, \binom{11}{8}, \binom{11}{9}$ binomiális együtthatók értékét, majd szintén számológépes feladatnak adja a $\sum_{i=0}^{11}\binom{11}{i}=2^{11}$ összefüggés igazolását. Az ilyen feladatokhoz segítségképpen leírja a számológépek részletes használatát is. Ebben a tankönyvcsaládban az emelt szintű tananyagok a fejezetek végén Ráadás címszó alatt találhatóak meg. A binomiális együtthatókhoz ilyen ráadás részben bemutatja a név eredetét, említi a binomiális tételt és a Pascal-háromszöggel való kapcsolatát is. Feladat összekötni a halmaz részhalmazainak számát a kombinatorikai megfontolásokkal. A 91. oldal 3. feladata a binomiális együtthatók közt fennálló (1.9) összefüggés igazolása.

A dolgozat 1.2.1. alszakaszában előkerült, a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést az OFI által kiadott matematika tankönyvcsalád 11. osztályosoknak írt [3] kötete állításként mondja ki úgy, hogy a háromszög csúcsai koordinátáinak számtani közepe. A bizonyítást a ráadás, azaz emelt szintű részben fejti ki, de nem az általunk bemutatott módon, hanem azt a tulajdonságot használja fel, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja.

A számtani sorozat fogalma és első n tagjának összege az Újgenerációs tankönyvcsalád 12. évfolyamosok sámára írt [4] könyvében szerepel. Az összeg bizonyítása csak az emelt részben kerül elő az n-edik tagra vonatkozó kifejezés felhasználásával és azzal az ötlettel, hogy kétféle módon adja össze a sorozat tagjait. Ebben a részben kitűzött példa az első n négyzetszám összegének igazolása.

A dolgozat első fejezetében tárgyalt további binomiális együtthatók közti összefüggések a középszintű matematika kerettantervben nem szerepelnek, de speciális matematika tantervben, matematika szakkörön, versenyfelkészítésben, tehetséggondozásban előkerülhetnek.

2. fejezet

Egyszerű áramkörök és egyenlőtlenségek

Ebben a fejezetben a fizikából az elektromosságtant hívjuk segítségül, és egyszerű áramkörökre támaszkodva (a [24] könyv 4. fejezete és a [7] cikk mentén haladva) igazoljuk az ismert közepek közötti egyenlőtlenségeket, valamint egyéb nevezetes egyenlőtlenségeket. Szükségünk lesz az eredő ellenállás fogalmára, továbbá felhasználjuk Ohm törvényét, Kirchhoff törvényeit és Rayleigh monotonitási elvét is. Tekintsük át a fizikai alapfogalmakat és összefüggéseket a [18] könyv felépítését követve.

2.1. Fizikai alapok

A legegyszerűbb áramkör egy feszültségforrásból, vezetékből és fogyasztókból áll. A továbbiakban számunkra a fogyasztónak az *ellenállása* mint a rajta átfolyó áramot akadályozó hatása és jellemző paramétere lesz fontos. Ohm kísérletileg megállapította, hogy adott fogyasztó esetén a rá eső feszültség (jele: U) és ennek hatására rajta átfolyó áram (jele: I) hányadosa állandó. Ezt a mennyiséget hívjuk a fogyasztó ellenállásának (jele: R). Tehát Ohm törvénye képlettel kifejezve: $R = \dfrac{U}{I}$.

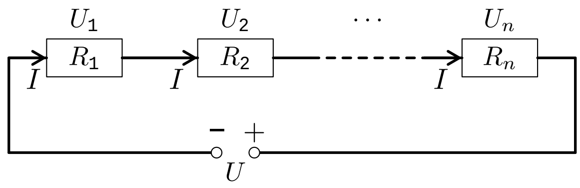
A fogyasztókat összekötő vezetékeket ideálisnak tekintjük, azaz nincs saját ellenállásuk. Ha egy áramkörbe több ellenállást is kapcsolunk, mindig létezik egy olyan ellenállás, melyet az eredeti ellenállás-hálózat helyére kapcsolva ugyanakkora feszültség hatására ugyanakkora áram folyik át rajta, mint az eredeti kapcsolás ellenállás-hálózatán összességében. Ezt az ellenállást hívjuk az adott kapcsolás *eredő ellenállásának* és általában R_e-vel jelöljük.

Idézzük fel Kirchhoff csomóponti és huroktörvényét, amelyek fizikából emelt szinten sincsenek benne a kerettantervben, de hasznos segítség nehezebb áramkörök eredő ellenállásának meghatározásához, így nagyon sok helyen tanítják az emelt szintű érettségire való felkészítés során.

Törvény (Kirchhoff I. törvénye)**.** *Bármely elágazási pontba (más néven csomópontba) befolyó áramok erősségének összege egyenlő az onnan kifolyó áramok erősségének összegével.*

Törvény (Kirchhoff II. törvénye)**.** *Egy áramkörben bármely irányított hurok mentén az egyes szakaszok feszültségeinek és a hurkon elhelyezett áramforrások belső feszültségeinek összege nulla.*

Kirchhoff törvényeiről részletesebben olvashatunk a [18] könyv 7.6. fejezetében. Most a törvények alkalmazásaként elevenítsük fel röviden az ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása esetén az eredő ellenállás kiszámítási módját, bővebben lásd a [18] könyvben.



2.1. ábra. Sorosan kapcsolt ellenállások

Ha egy U feszültségű áramforrásra a 2.1. ábra szerint *sorosan* kapcsoljuk az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokat, akkor mindegyiken ugyanaz az I áram fog átfolyni a nyilakkal megegyező irányban, ugyanis az egyenáram negatív töltésű elektronok mozgása, így az elektronok az áramforrás pozitív pólusából a negatív felé áramlanak. Ohm törvénye alapján az R_i ellenállásra eső feszültség $U_i = IR_i$. Ha a 2.1. ábrán látható hurokban a telep pozitív sarkától indulva az óramutató járásával ellentétes irányban körbemegyünk, akkor Kirchhoff II. törvénye szerint:

$$U - U_1 - U_2 - \ldots - U_n = 0.$$

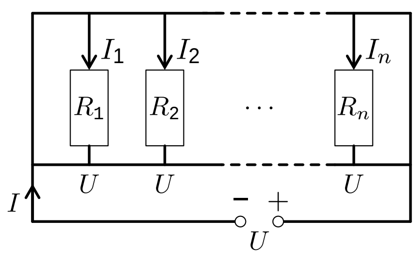
Az eredő ellenállás fogalma alapján $U = R_e I$, továbbá $U_i = IR_i$, így

$$R_e I - R_1 I - R_2 I - \ldots - R_n I = 0,$$

amit az előbbi egyenletbe behelyettesítve, majd az egyenleteket rendezve és I-vel egyszerűsítve megkapjuk az eredő ellenállás értékét soros kapcsolás esetén:

$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \tag{2.1}$$

Tehát soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege, ami a számtani középük n-szerese.



2.2. ábra. Párhuzamosan kapcsolt ellenállások

Ha egy U feszültségű áramforrásra a 2.2. ábra szerint *párhuzamosan* kapcsolunk $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokat, akkor Kirchhoff első törvényének megfelelően a főágban folyó I áramerősség megoszlik az ellenállásokon úgy, hogy mindegyikre ugyanakkora feszültség esik:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

ahol Ohm törvénye szerint $I_i = \frac{U}{R_i}$, ezért

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n}.$$

Az eredő ellenállás értelmezése alapján $I = \frac{U}{R_e}$, amit az előbbi egyenletbe behelyettesítve, U-val való egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{2.2}$$

Valójában tehát párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások reciprokösszegének reciproka, mely az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ pozitív számok harmonikus közepének n-ed része.

Kirchhoff törvényei mellett szükségünk lesz Rayleigh monotonitási törvényére vagy más néven monotonitási elvére.

Elv (Rayleigh monotonitási elve). *Ha egy ellenállás-hálózatban valamelyik ellenállás értékét megnöveljük, a rendszer eredő ellenállása nem csökkenhet, és hasonlóan, ha valamely ellenállás értékét csökkentjük, az eredő ellenállás értéke nem nőhet.*

Ez az elv a korábban felrajzolt soros és párhuzamos kapcsolások esetén teljesen nyilvánvaló, hiszen mind a (2.1), mind pedig a (2.2) összefüggésben az eredő ellenállás értéke növekszik, ha bármelyik R_i ellenállás értékét megnöveljük. Egy tetszőleges kapcsolás esetében könnyebb talán úgy elképzelni, mintha a vezetékek egy csatornahálózatot alkotnának, ahol az ellenállások a csövek keresztmetszetével arányosak, tehát azt adják meg, mennyi víz folyhat át rajtuk. Így szemléltethetjük, hogy ha bármelyik csatorna keresztmetszetét csökkentjük, akkor nem lehetséges, hogy az egész hálózaton a korábbinál több víz folyjon át (feltéve, hogy a víz áramlási sebességét nem változtatjuk meg). Ez az elektromosságtanban azt jelenti, hogy ha bármelyik ellenállás értékét megnöveljük, akkor nem csökkenhet az eredő ellenállás értéke.

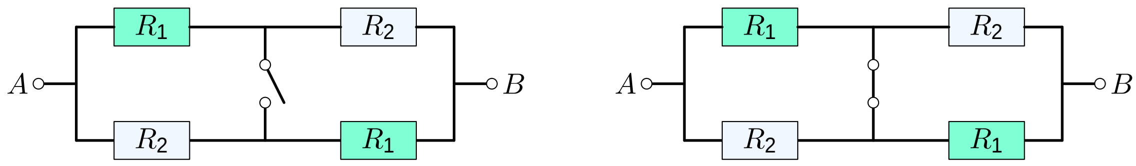
2.2. Nevezetes közepek

Igencsak meglepő módon a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek egy része ellenállás-hálózatokon keresztül is szemléltethető. Ehhez a [24] könyvet és a [7] cikket követve a hálózatokba kapcsolókat is beépítünk, melyek ki-, illetve bekapcsolása esetén vizsgáljuk a rendszer eredő ellenállását. A kapcsoló ellenállását zárt állapotban nullának vesszük (vagyis ideális vezetékként viselkedik), nyitott állapotban pedig egy „szakadás”, azaz végtelen nagy ellenállásnak tekinthető (tehát nem folyik rajta keresztül áram).

2.2.1. Számtani és harmonikus közép két számra

Tekintsük a 2.3a. ábra szerinti kapcsolást nyitott kapcsoló esetén, és határozzuk meg a rendszer eredő ellenállását! Vegyes kapcsolások esetén úgynevezett „hagymahéj” módszerrel belülről kifelé haladva írjuk fel a hálózat kisebb egységeinek eredő ellenállását, majd az adott részeket helyettesítjük a saját eredő ellenállásukkal, és így haladunk tovább, míg a teljes rendszer eredő ellenállását megkapjuk. Ha az A és B pontokra feszültséget kapcsolunk, az áram az alsó és a felső ágon tud folyni. Ha a felső ágat nézzük, ott R_1 és R_2 sorosan van kapcsolva, így a felső ág eredő ellenállása $R_1 + R_2$. Hasonlóan az alsó ág eredő ellenállása is $R_1 + R_2$. A két ág párhuzamosan van kapcsolva, tehát a rendszer eredő ellenállása nyitott kapcsoló esetén:

$$R_e^{\mathrm{ny}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_1+R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{2}, \tag{2.3}$$

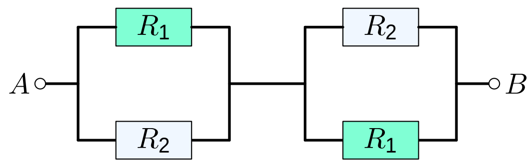


(a) Kapcsoló nyitott állásban (b) Kapcsoló zárt állásban

2.3. ábra. Kapcsoló állásának változtatása

ami éppen az R_1, R_2 számok számtani közepe.

Most zárjuk be a kapcsolót és határozzuk meg ennek a kapcsolásnak is az eredő ellenállását! Ahhoz, hogy ezt megtehessük, célszerű a kapcsolási rajzot kicsit átalakítani, hogy jobban elkülönüljenek a sorosan, illetve párhuzamosan kapcsolt részek a 2.4. ábrán látható módon. Az átrajzolásnál kihasználtuk, hogy a vezeték ideális, azaz az ellenállása nulla.



2.4. ábra. A 2.3b. kapcsolási rajz másik ábrázolása

Az átrajzolás után már világos, hogy két blokk van sorosan kapcsolva, amelyek egyenként két-két párhuzamosan kapcsolt ellenállásból állnak. Egy ilyen blokk eredő ellenállása (a párhuzamos kapcsolás alapján):

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}.$$

Tehát a 2.3b. ábrán látható kapcsolás eredő ellenállása:

$$R_e^z = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}, \tag{2.4}$$

ami éppen az R_1, R_2 számok harmonikus közepe.

Rayleigh monotonitási elve szerint azzal, hogy bezárunk egy kapcsolót, az eredő ellenállás értéke nem nőhet, ezért a (2.3) és a (2.4) értékek közt fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{R_1+R_2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}},$$

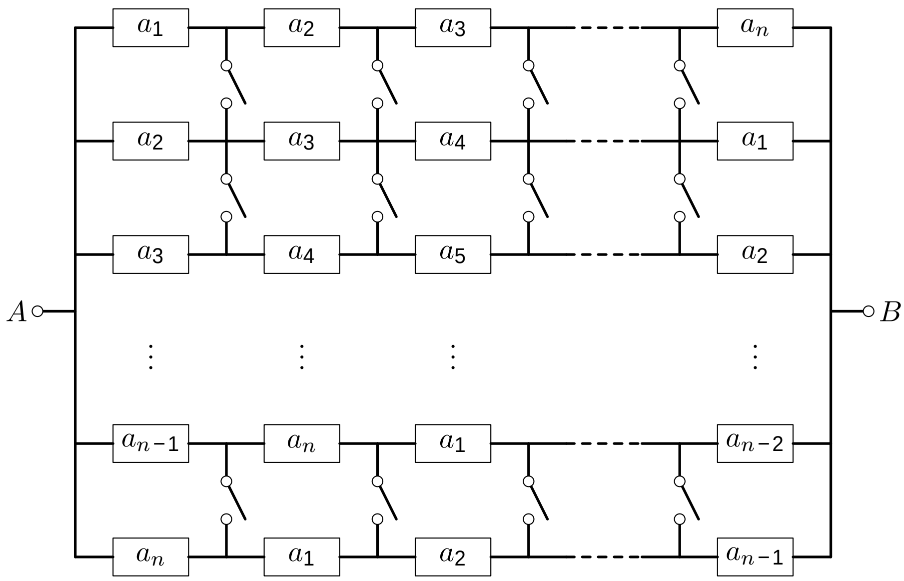
amivel éppen az R_1, R_2 számok számtani és harmonikus közepe közti egyenlőtlenséget nyertük.

2.1. Tétel (Számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség)**.** *Legyenek a_1 és a_2 pozitív számok. Ekkor az $A(a_1, a_2) = \frac{a_1+a_2}{2}$ számtani és a $H(a_1, a_2) = \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$ harmonikus középük közt fennáll az $A \geq H$ egyenlőtlenség, ahol egyenlőség pontosan $a_1 = a_2$ esetén teljesül.*

2.2. *Megjegyzés.* Az a_1, a_2 számok harmonikus közepe $H(a_1, a_2) = \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}$ alakban is felírható. Ez utóbbi alak akkor is értelmes, ha a_1 és a_2 valamelyike (de csakis az egyik) nullával egyenlő.

2.2.2. Számtani és harmonikus közép általános esetben

Vizsgáljuk meg, hogy a 2.3a. ábrán milyen speciális tulajdonságai vannak az ellenállások elhelyezésének! Vegyük észre, hogy a kapcsoló nyitott állásakor két egyforma ellenállású blokk van párhuzamosan kapcsolva. Az eredő ellenállás (2.2) kiszámolási módjából következik, hogy ha n darab egyforma R ellenállást párhuzamosan kötünk, akkor az eredő ellenállás értéke $R_e = \frac{R}{n}$. Szintén fontos észrevétel, hogy a kapcsoló zárt állásakor valójában két egyforma ellenállás-blokkot kötünk sorosan, és így eredőként a blokk eredő ellenállás reciprokának kétszeresét kapjuk. Ha n ilyen blokk lenne párhuzamosan kapcsolva, akkor (2.3) képlet alapján a reciprok n-szeresét kapnánk eredő ellenállásként. Ezen megfigyelések alapján megalkotható n ellenállás esetén is az a hálózat, melyben a kapcsolók nyitásával, illetve zárásával szemléltethető a számtani és a harmonikus közép közti egyenlőtlenség. Az egyszerűbb jelölés érdekében legyenek az ellenállások értékei rendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok. A 2.5. ábrán látható módon kapcsoljuk össze az ellenállásokat: minden sorban sorosan kapcsoljuk mind az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ellenállásokat, csak a sorrend legyen más, minden sorban az eggyel nagyobb indexű ellenállással kezdjük (és az indexeket ciklikusan tekintjük).



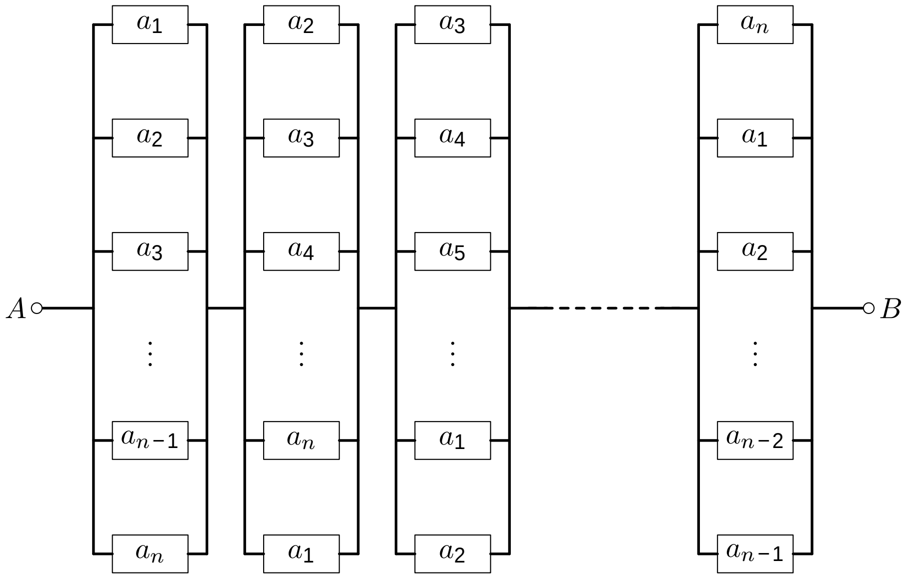
2.5. ábra. Ellenállás-hálózat a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenséghez

Határozzuk meg az így kapott kapcsolás eredő ellenállását! Mivel minden sorban ugyanazok az ellenállások vannak sorosan kapcsolva, így minden sor ellenállása azonos, tehát összesen n darab egyforma, $R = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ értékű ellenállást kötöttünk párhuzamosan. Ezért a rendszer eredő ellenállása:

$$R_e^{\mathsf{ny}} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{2.5}$$

Ha az összes kapcsolót bezárjuk, a 2.6. ábrán látható kapcsolást kapjuk. Számoljuk ki ebben az esetben is az eredő ellenállást! Vegyük észre, hogy n darab egyforma blokk van sorosan kötve. Egy ilyen blokk egy oszlop, melyben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ellenállások vannak párhuzamosan kapcsolva. Ezért egy blokk eredő ellenállása:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$



2.6. ábra. A 2.5. ábra hálózata zárt kapcsolókkal

Az egész kapcsolás eredő ellenállása tehát

$$R_e^z = n \cdot \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}. \tag{2.6}$$

Rayleigh monotonitási elve miatt az eredő ellenállás értéke nem nőhet a kapcsolók zárásával, ezért a (2.5) és a (2.6) értékek közt fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ez pedig pontosan az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok számtani és harmonikus közepe közti egyenlőtlenség.

2.3. Tétel. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor az $A = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ számtani középük és a $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ harmonikus középük között az $A \geq H$ egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

A tétel precíz bizonyítása megtalálható a [25] könyvben.

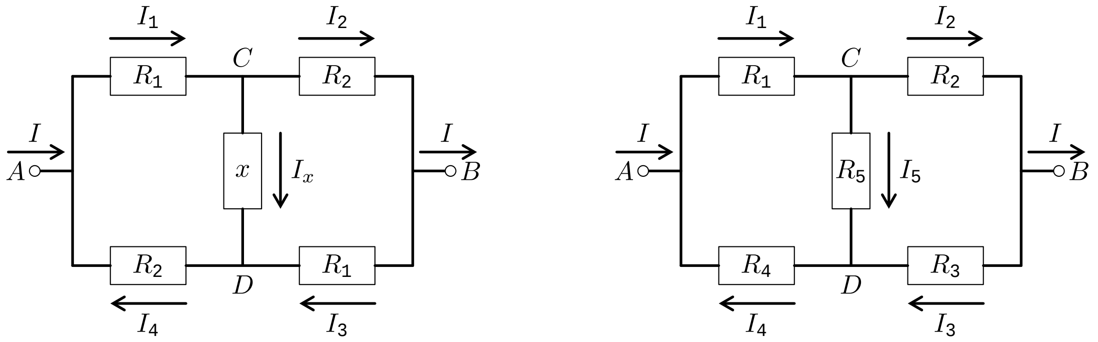
2.2.3. A mértani közép egy előfordulása

A következő példa a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) fizika rovatában jelent meg 2016 februárjában P. 4813. jelzéssel (a feladatot kitűzte: Bertalan Zoltán).

2.4. Feladat. Tekintsük a 2.7a. ábrán látható hídkapcsolást.

a) Mekkora a középső ellenállás értéke, ha az A és B pontok közötti eredő ellenállás éppen a középső ellenállás értékével egyezik meg: $R_{AB} = x$?

b) Megválasztható-e x értéke úgy, hogy az eredő ellenállás R_1 és R_2 négyzetes közepe legyen: $R_{AB} = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$?



(a) A 2.4. feladat kapcsolása (b) Hídkapcsolás különböző ellenállásokkal

2.7. ábra. Hídkapcsolások

A megoldáshoz több úton is eljuthatunk, például a hídkapcsolás egy lehetséges átrajzolása az úgynevezett csillag-delta átalakítás, amelynek leírása megtalálható többek között a [18] könyvben. Mi most a leginkább „ablakmódszer” néven ismert eljárást használjuk, mely Kirchhoff csomóponti és huroktörvényén alapul. Ha az A és B pontokra U feszültséget kapcsolunk, a rendszeren Ohm törvénye alapján $I = \frac{U}{R_e}$ erősségű áram fog átfolyni. Ennyi folyik be az A ponton, megoszlik valahogy az ágak közt, majd ennyinek kell ki is folyni a B ponton. A 2.7a. kapcsolási rajzban ezeket az áramokat tüntettük fel. Az x ellenálláson átfolyó I_x áramot tetszőlegesen vehetjük fel, ha viszont negatív számot kapunk eredményül, az annyit jelent, hogy az általunk felvett iránnyal ellentétes irányban folyik az áram. Írjuk fel a 2.7a. ábrán bal oldali, majd a jobb oldali hurokra is a huroktörvényt:

$$\begin{aligned} I_1R_1 + I_x x + I_4R_2 &= 0, \\ I_2R_2 + I_3R_1 - I_x x &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ezenkívül a csomóponti törvény szerint a 2.7a. ábra három, például a B, C, D betűkkel jelölt csomópontjaira a következő teljesül:

$$\begin{aligned} I_2 - I - I_3 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_x &= 0, \\ I_x + I_3 - I_4 &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Így öt egymástól független egyenletet kaptunk az I_1, I_2, I_3, I_4, I_x ismeretlenekre. Ezekből kifejezhetőek az áramerősségek és az eredő ellenállásra is adódik egy összefüggés. Ebben a feladatban ez utóbbi természetesen x-et tartalmazza, amelyet a feladat eredeti feltételének figyelembevételével határozhatunk majd meg. A levezetés megtalálható többek között a [26] cikkben, bár a hídkapcsolás eredő ellenállására vonatkozó összefüggés több más helyen is előfordul. A [26] cikk a 2.7b. ábra szerint öt különböző ellenállásból álló hídkapcsolás esetén határozza meg az eredő ellenállás értékét:

$$R_e = \frac{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_1R_3R_5 + R_1R_4R_5 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_2R_4R_5}{R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_5 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5}.$$

A konkrét KöMaL feladatnak megfelelően az előbbi képletben a következő helyettesítéseket kell elvégezni: $R_1 = R_1,\ R_2 = R_2,\ R_3 = R_2,\ R_4 = R_1,\ R_5 = x$. Ekkor összevonás után az eredő ellenállás értéke:

$$R_e = \frac{x(R_1 + R_2) + 2R_1R_2}{R_1 + R_2 + 2x}. \tag{2.9}$$

A feladat szerint az $R_e = x$ egyenletet kell megoldani, amely a (2.9) összefüggés alapján a nevezővel való szorzás után a következő alakot ölti:

$$x(R_1 + R_2) + 2R_1R_2 = x(R_1 + R_2) + 2x^2,$$

ahonnan rendezéssel $R_1R_2 = x^2$ adódik, azaz

$$x = \sqrt{R_1R_2},$$

ami az R_1, R_2 számok mértani közepe. Ebből következik, hogy a 2.4. feladat a) részében szereplő feltétel pontosan akkor teljesül, ha x éppen a megadott két ellenállás mértani közepével egyezik meg.

Mielőtt a feladat b) részére rátérnénk, vizsgáljuk meg az eredő ellenállás értékét megadó (2.9) összefüggést. Ha $x = 0$, akkor az x ellenállás vezetékként viselkedik, és így a hálózat olyan, mint a 2.3b. ábrán látható kapcsolás, ilyenkor $R_e = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, ami a két ellenállás értékének harmonikus közepe. Ha $x = \infty$, akkor az ellenállás egy szakadás, és így a kapcsolás a 2.3a. ábrán látható kapcsolással egyezik meg, ezért az eredő ellenállás értéke $R_e = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$, azaz a két ellenállás értékének számtani közepe. Rayleigh monotonitási elve szerint, ha x értékét növeljük, az eredő ellenállás értéke nem csökkenhet, tehát a (2.9) összefüggés x-nek monoton növő függvénye kell hogy legyen, ami az alábbi átalakításból matematikailag is látszik:

$$\frac{x(R_1 + R_2) + 2R_1R_2}{R_1 + R_2 + 2x} = \frac{R_1 + R_2}{2} - \frac{(R_1 - R_2)^2}{2(R_1 + R_2 + 2x)}.$$

Emiatt az eredő ellenállás az R_1, R_2 számok harmonikus és számtani közepe közti értéket tud csak felvenni. Ez azt is jelenti, hogy az $x = \sqrt{R_1R_2}$ esetben kapott eredő ellenállás értéke is a számtani és a harmonikus közép közé esik. Ezzel a következő tétel $n = 2$ esetét nyertük.

2.5. Tétel. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor az $A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ számtani, a $G = \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$ mértani és a $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ harmonikus közepük között $A \geq G \geq H$ egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

A tétel bizonyítása megtalálható a [25] tankönyvben, de két szám esetén a [22] tankönyvben is.

A 2.4. feladat b) részének megválaszolásához ismernünk kell a négyzetes közép viszonyát a többi középhez képest.

2.6. Tétel. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor az A számtani, a G mértani, a H harmonikus és az $N = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ négyzetes közepük közt érvényes az $N \geq A \geq G \geq H$ egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Bizonyítás. Az $A \leq N$ egyenlőtlenség igazolása történhet a szokásos teljes négyzetté alakítással, de mi most inkább az 1.1.3. alszakaszban igazolt Csebisev-egyenlőtlenséget (1.7. tétel) használjuk. Feltehető, hogy $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ (különben az indexeket felcseréljük, ami által a bizonyítandó egyenlőtlenség nem változik). Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget az $m_i = a_i$ és $x_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ szereposztással. Ekkor:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát n^2-tel osztva, majd négyzetgyököt vonva (ami a számok pozitivitása miatt ekvivalens átalakítás) a tétel állítását kapjuk:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

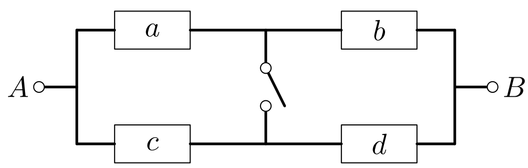
Egyenlőség akkor teljesül az 1.7. tétel szerint, ha $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$ vagy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, azaz $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Most már meg tudjuk válaszolni a 2.4. feladat b) részének kérdését. Mivel a négyzetes közép legalább akkora, mint a számtani közép, és láttuk, hogy a 2.7a. ábrán lévő kapcsolás eredő ellenállása legfeljebb az R_1, R_2 számok számtani közepe, ezért csak egyetlen esetben lehet az eredő ellenállás értéke az R_1, R_2 számok négyzetes közepe, mégpedig ha $R_1 = R_2$, és ekkor a két szám minden nevezetes közepe megegyezik.

2.7. ***Megjegyzés.*** A (2.7)–(2.8) egyenletrendszer megoldásakor előfordulhat, hogy $I_x = 0$ megoldást kapunk eredményül, azaz az x ellenálláson nem folyik áram. Ezt a speciális esetet ellenállás mérésére is használják a Wheatstone-féle kapcsolásban a 2.7b. ábra szerint. Ha ugyanis $\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$, akkor belátható, hogy a C és D pontok ekvipotenciálisak, azaz a C és D pontok közti feszültség nulla. Ilyenkor R_5-ön annak értékétől függetlenül nem folyik át áram. Méréshez ezen az elrendezésen annyit módosítanak, hogy R_5 helyére bekötnek egy érzékeny ampermérőt (a rajta átfolyó áram erősségét mérő műszer), az ismeretlen ellenállást bekötik például az R_1 ellenállás helyére, R_4 helyére pedig egy változtatható ellenállást kötnek. Az ellenállás értékének változtatásával az a cél, hogy az ampermérő ne mutasson áramot. Ilyenkor úgynevezett kiegyenlített Wheatstone-kapcsolás jön létre, az ismeretlen ellenállás értéke pedig egyszerűen kifejezhető a másik három ellenállás segítségével.

2.3. További nevezetes egyenlőtlenségek

A 2.3a. ábra szerinti elrendezésben speciális volt az ellenállások értéke, hiszen párosával megegyeztek. Több ellenállásra vonatkozó általános esetben is úgy választottuk meg őket, hogy egy-egy ágban mind az n különböző ellenállás pontosan egyszer forduljon elő. Most vizsgáljuk meg a 2.3a. ábra hálózatának azt az általánosítását, amikor mind a négy ellenállás különböző. Legyenek az ellenállások a 2.8. ábra szerint a, b, c, d értékűek, majd ezekkel írjuk fel a monotonitási elv alapján a kapcsoló nyitott, illetve zárt állásakor meghatározott eredő ellenállások között fennálló egyenlőtlenséget.



2.8. ábra. Kapcsoló nyitott állásban

Nyitott kapcsoló esetén a rendszer eredő ellenállása:

$$R_e^{\mathrm{ny}} = \frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}} = \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d},$$

zárt kapcsoló esetén pedig:

$$R_e^{\mathsf{z}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}} = \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}.$$

Rayleigh monotonitási elve miatt

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}$$

teljesül.

2.8. Állítás. *Legyenek* a, b, c, d *nemnegatív valós számok, ahol* $a + c = 0$ *és* $b + d = 0$. *Ekkor:*

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $ad = bc$.

Bizonyítás. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd hozzuk közös nevezőre a törteket, ekkor azt kell igazolni, hogy

$$\frac{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d) - ac(a+b+c+d)(b+d) - bd(a+b+c+d)(a+c)}{(a+b+c+d)(a+c)(b+d)} \geq 0.$$

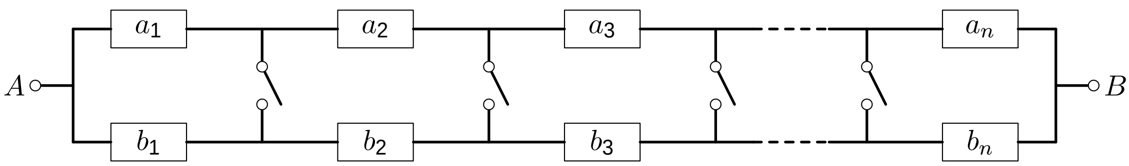
Mivel a tört nevezője mindig pozitív, elég csak a számlálóval foglalkozni. A zárójelek felbontása és összevonás után (megfelelő odafigyeléssel) a számláló a következő alakot ölti:

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd.$$

Vegyük észre, hogy ez éppen $(ad - bc)^2$, ami nemnegatív. Így tehát a tört értéke sem negatív, nulla pedig pontosan akkor, ha az $ad = bc$ feltétel teljesül. Ezzel az állítás egyenlőtlenségét beláttuk. □

2.3.1. Milne-egyenlőtlenség

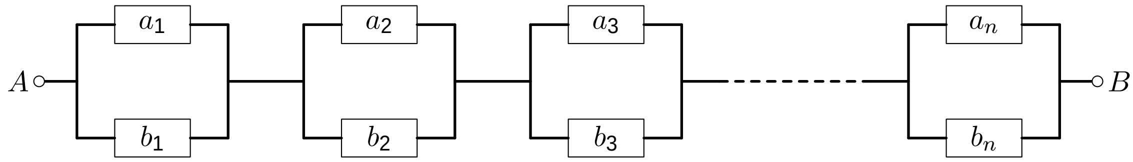
A 2.8. ábrán látható kapcsolás tovább általánosítható, ha nem két ellenállást kötünk sorosan egy ágban, hanem n darabot a 2.9. ábra szerint.



2.9. ábra. Ellenállás-hálózat a Milne-egyenlőtlenséghez

Első esetben a kapcsolók legyenek mind nyitva, és határozzuk meg a kapcsolás eredő ellenállását. Két n hosszú ág van párhuzamosan kapcsolva, ahol a felső ág eredő ellenállása: $R_a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; hasonlóan az alsó ágé: $R_b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Így a teljes hálózat eredő ellenállása a kapcsolók nyitott állapotában:

$$R_e^{\mathsf{ny}} = \frac{1}{\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + \frac{1}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}.$$



2.10. ábra. A 2.9. ábra hálózata zárt kapcsolók esetén

Zárjuk be a kapcsolókat, ekkor a 2.10. ábra szerinti kapcsolást nyerjük. Határozzuk meg az eredő ellenállást! Az a_i, b_i ellenállásokból álló párhuzamosan kapcsolt blokk eredő ellenállása:

$$R_i = \frac{1}{\dfrac{1}{a_i} + \dfrac{1}{b_i}}.$$

Ha ezeket minden i-re sorosan kapcsoljuk, akkor az eredő ellenállás:

$$R_e^z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dfrac{1}{a_i} + \dfrac{1}{b_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}.$$

Rayleigh monotonitási elve alapján a kapcsoló zárásával az eredő ellenállás nem nőhet, így fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}.$$

Ezzel az úgynevezett Milne-egyenlőtlenséget nyertük, amelyet Edward Arthur Milne (1896–1950) angol asztrofizikus és matematikus 1925-ben írt fel.

2.9. Állítás (Milne-egyenlőtlenség)**.** *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *és* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geq 2)$ *nemnegatív számok, ahol* $a_i + b_i > 0$ *minden* $i = 1, \ldots, n$ *esetén. Ekkor:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}.$$

Bizonyítás. Az állítás többek között teljes indukcióval is bizonyítható. Az $n = 2$ eset éppen a 2.8. állítás, amelyet már igazoltunk. Tegyük fel, hogy n-re igaz az egyenlőtlenség és lássuk be ebből $(n+1)$-re is. Alkalmazzuk a 2.8. állítást a következő szereposztásban: legyen $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $b = a_{n+1}$, $c = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ és $d = b_{n+1}$. Ekkor $a + c > 0$ és $b + d > 0$, így

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n+1} b_i}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} + \frac{a_{n+1} b_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}}.$$

Itt a jobb oldal első tagjára az indukciós feltevést alkalmazva:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i},$$

tehát

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} + \frac{a_{n+1} b_{n+1}}{a_{n+1} + bn + 1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i},$$

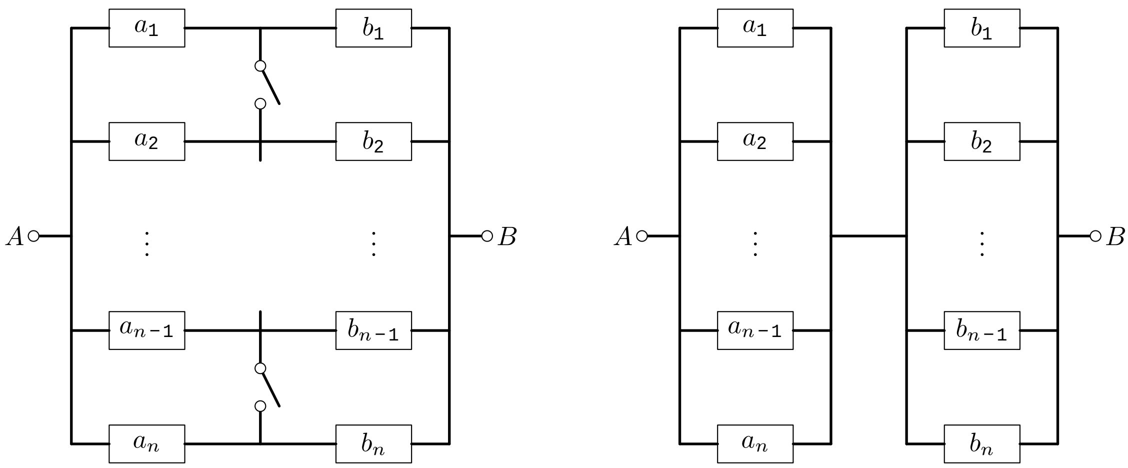
ami éppen a kívánt egyenlőtlenség. □

2.10. *Megjegyzés.* Belátható (lásd a [7] cikket), hogy a 2.9. állításbeli egyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és a $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorok egyirányúak.

2.3.2. Minkowski-egyenlőtlenség egy speciális esete

A 2.8. ábrán lévő ellenállás-hálózat egy másik lehetséges általánosítása a 2.11a. ábrán látható. Ha az összes kapcsoló nyitva van, akkor n darab $a_i + b_i$ eredő ellenállású ág van párhuzamosan kötve. A rendszer eredő ellenállása ilyenkor:

$$R_e^{\text{ny}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i + b_i}}.$$



(a) Nyitott kapcsolók (b) Zárt kapcsolók

2.11. ábra. Ellenállások kapcsolása a Minkowski-egyenlőtlenséghez

Ha az összes kapcsolót bezárjuk, a 2.11b. ábrán látható elrendezést kapjuk, melyben egy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ és egy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}$ eredő ellenállású blokk van sorosan kötve. Ekkor a rendszer eredő ellenállása:

$$R_e^z = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}}.$$

Rayleigh monotonitási elve alapján a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}.$$

Vegyük észre, hogy az előbbi egyenlőtlenség jobb oldalán az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok harmonikus közepeinek n-ed része áll. A bal oldal pedig az $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n$ számok harmonikus közepének n-ed része. Ha mindkét oldalt n-nel megszorozzuk, az alábbi állításban szereplő egyenlőtlenséget nyerjük.

2.11. Állítás. *Legyenek a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pozitív számok. Ekkor*

$$H_n(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \geq H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) + H_n(b_1, b_2, \ldots, b_n), \tag{2.10}$$

ahol H_n az argumentumában szereplő n darab szám harmonikus közepét jelöli.

Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 2$ eset pontosan a 2.8. állítás $a = a_1$, $b = b_1$, $c = a_2$, illetve $d = b_2$ szereposztással. Tegyük fel, hogy n-re igaz az egyenlőtlenség és lássuk be $(n+1)$-re is. Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\underline{a}_i = a_i$, $\underline{b}_i = b_i$ és legyen $\underline{a}_n = \dfrac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$, illetve $\underline{b}_n = \dfrac{b_n b_{n+1}}{b_n + b_{n+1}}$. Az indukciós feltételből adódóan:

$$H_n(\underline{a}_1+\underline{b}_1, \ldots, \underline{a}_n+\underline{b}_n) \geq H_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) + H_n(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n). \tag{2.11}$$

Vegyük észre, hogy

$$H_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)} = n\frac{H_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})}{n+1}$$

és hasonlóan

$$H_n(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n) = \frac{n}{\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_{n-1}} + \left(\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}}\right)} = n\frac{H_{n+1}(b_1, \ldots, b_{n+1})}{n+1}.$$

Tehát a (2.11) egyenlőtlenség így írható:

$$H_n(\underline{a}_1+\underline{b}_1, \ldots, \underline{a}_n+\underline{b}_n) \geq \frac{n}{n+1}\Big(H_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) + H_{n+1}(b_1, \ldots, b_{n+1})\Big). \tag{2.12}$$

Alkalmazzuk most a 2.8. állítást az $a_n, a_{n+1}, b_n, b_{n+1}$ számokra:

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n = \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} + \frac{b_n b_{n+1}}{b_n + b_{n+1}} \leq \frac{(a_n+b_n)(a_{n+1}+b_{n+1})}{a_n+b_n+a_{n+1}+b_{n+1}}.$$

Mivel H_n világosan látható módon monoton növő függvénye bármely változójának, így

$$\begin{aligned} H_n(\underline{a}_1+\underline{b}_1, \ldots, \underline{a}_n+\underline{b}_n) &\leq H_n\left(a_1+b_1, \ldots, a_{n-1}+b_{n-1}, \frac{(a_n+b_n)(a_{n+1}+b_{n+1})}{a_n+b_n+a_{n+1}+b_{n+1}}\right) = \\ &= \frac{n}{\frac{1}{a_1+b_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} + \frac{1}{a_n+b_n} + \frac{1}{a_{n+1}+b_{n+1}}} = \\ &= \frac{n}{n+1}H_{n+1}(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_{n+1}+b_{n+1}). \end{aligned}$$

Ezt a becslést a (2.12) egyenlőtlenségben felhasználva:

$$\frac{n}{n+1}H_{n+1}(a_1+b_1, \ldots, a_{n+1}+b_{n+1}) \geq \frac{n}{n+1}\Big(H_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) + H_{n+1}(b_1, \ldots, b_{n+1})\Big),$$

amit $\frac{n}{n+1}$-gyel egyszerűsítve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk n helyett $(n+1)$-re. □

2.12. *Megjegyzés.* Megmutatható, hogy a 2.11. állításban az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és a $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorok egyirányúak.

A (2.10) egyenlőtlenség egy alkalmazásaként tekintsük a következő feladatot, amely a KöMaL 1987. májusi számában jelent meg F. 2639. jelzéssel.

2.13. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.$$

A 2.13. feladat I. megoldása. Írjuk fel a 2.11. állítást az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és az $1, 1, \ldots, 1$ számokra! Ekkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}} \geq \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} + \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} = \frac{1}{n}$, így az iménti egyenlőtlenségből rendezéssel éppen a feladat egyenlőtlenségét kapjuk. □

A KöMaL-ban megjelent hivatalos megoldás a Csebisev-egyenlőtlenséget használja. Érdemes ezt is megnéznünk.

A 2.13. feladat II. megoldása. Mivel a feladatban szereplő egyenlőtlenség az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok sorrendjétől nem függ, feltehetjük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Alkalmazzuk az 1.7. tételt a következő szereposztással: legyen $m_i = \frac{1}{a_i}$ és $x_i = \frac{1}{1+a_i}$. Az (a_i) monoton csökkenő sorozat, ezért az (m_i) és az (x_i) monoton növekvő sorozat, tehát ezekre teljesül a Csebisev-egyenlőtlenség feltétele, így

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \leq n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{1+a_i}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon

$$\frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{1+a_i} = \frac{(1+a_i) - a_i}{a_i(1+a_i)} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{1+a_i},$$

ezért

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \leq n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \right).$$

Innen a bal oldali kifejezéssel és n-nel való osztással kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}},$$

ami éppen a feladat állítása.

□

2.14. *Megjegyzés.* A (2.10) egyenlőtlenség H_n jelölések nélkül így is felírható:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{-1} \right)^{-1} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \right)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{-1} \right)^{-1}.$$

Ez az egyenlőtlenség valójában a következő egyenlőtlenségcsalád tagja.

2.15. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)**.** *Legyenek* a_i, b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ *valós számok és* $p \geq 1$. *Ekkor:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ha $p < 1$ *és* $p = 0$*, továbbá* a_i, b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ *nem nulla számok, akkor az egyenlőtlenség fordított iránnyal teljesül.*

Vegyük észre, hogy $p = -1$ és $a_i > 0, b_i > 0$ esetén a Minkowski-egyenlőtlenség a 2.14. megjegyzésben megfogalmazott alakot ölti, amely a 2.11. állítás.

Egy másik érdekes eset a $p = 2$, ilyenkor:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

ami az n dimenziós $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektor euklideszi hossza. Ez $n = 2, n = 3$ esetben középiskolából is ismert koordináta-geometriában, ahol egy vektor hosszát $|a|$ jelöli. Ezzel a jelöléssel maga a Minkowski-egyenlőtlenség a $p = 2$ esetben így írható fel: $|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$. Ezt szokás az n dimenziós háromszög-egyenlőtlenségnek nevezni, amely két dimenzióban hetedikes tankönyvekben is előfordul csak szavakban megfogalmazva: egy háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál (feltéve, hogy a háromszög nem elfajuló).

Az eddig tárgyalt nevezetes közepeken kívül be lehet vezetni az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok p-edik hatványközepét (ahol $p = 0$ valós szám) a következőképpen:

$$M_p(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Ennek speciális esetei éppen a korábban ismertetett nevezetes közepeket adják. A $p = -1$ eset, a harmonikus közép, már előfordult, csak eddig H_n-nel jelölve:

$$H_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = M_{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Továbbá $p = 1$ esetben a számtani közepet nyerjük:

$$M_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

$p = 2$ esetén pedig a négyzetes közepet:

$$M_2(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

A Minkowski-egyenlőtlenséget $n^{1/p}$-vel osztva a hatványközepekre $p \geq 1$ esetben a következő egyenlőtlenség adódik:

$$M_p(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \leq M_p(a_1, \dots, a_n) + M_p(b_1, \dots, b_n),$$

ha pedig $p < 1$, akkor a fordított egyenlőtlenség érvényes. A [28] könyvben leírt módon a határérték-számítás segítségével a hatványközép fogalma kiterjeszthető a $p = 0$ esetre is, amikor a geometriai közepet kapjuk:

$$M_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

A Minkowski-egyenlőtlenségről bővebben a [36] cikkben olvashatunk.

2.3.3. Egy OKTV feladatbeli egyenlőtlenség

A 2013/2014-es tanévben az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen matematikából a speciális tantervű gimnáziumok kategóriája döntő fordulójában tűzték ki az alábbi feladatot.

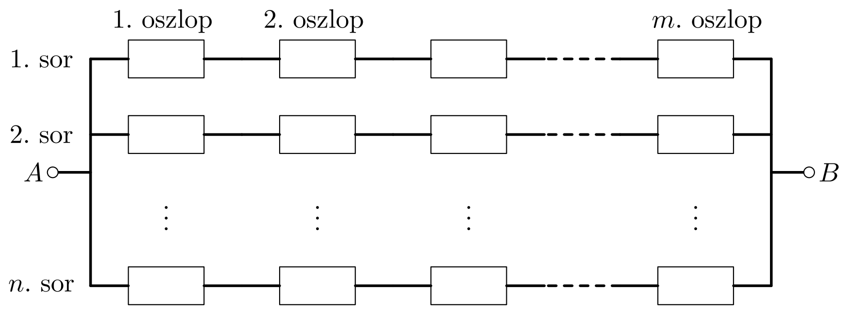
2.16. Feladat. A p és q pozitív számokra $p + q \leq 1$. Igazoljuk, hogy bármely m, n egészekre

$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget 1968-ban J. C. Turner és V. Conway vetette fel ellenállás-hálózatok kapcsán, lásd a [33] cikkben. Most az ő gondolatmenetüket közöljük.

A 2.16. feladat I. megoldása. Előzetesen vegyük észre, hogy az egyenlőtlenséget elegendő $p+q = 1$ esetén igazolni. Valóban, ha $p+q = 1$ esetén teljesül, akkor p és q közül bármelyiket (akár mindkettőt) csökkentve az egyenlőtlenség bal oldala növekszik, tehát továbbra is fennáll az egyenlőtlenség.

Tekintsük a 2.12. ábra szerinti n sorból álló csupa egyforma és egymástól függetlenül működő ellenállásból épített hálózatot, melyben minden sorban m darab ellenállás van sorosan kapcsolva. Az eddigiektől eltérően most nem az eredő ellenállást keressük, hanem annak a feltételét vizsgáljuk meg, hogy ha az A és B pontokra feszültséget kapcsolunk, akkor folyik-e át áram a rendszeren. Ha minden ellenállás tökéletesen működik, akkor a fejezet korábbi részeiben tárgyaltak alapján az eredő ellenállást kiszámolva az átfolyó áram erősségét is pontosan meg tudjuk határozni. Tegyük fel, hogy mindegyik ellenállás csak p valószínűséggel működik és $q = 1 - p$ valószínűséggel nem működik, azaz szakadásként viselkedik. A kapcsolást egy úthálózatnak tekintve úgy is fogalmazhatunk, hogy az egyes útszakaszokon (az ellenállások helyén) p valószínűséggel tudunk áthaladni és $q = 1 - p$ valószínűséggel le van zárva. Mekkora esélyünk van A-ból B-be eljutni?



2.12. ábra. A 2.16. feladat kapcsolása

Mivel a sorok között nincs átjárási lehetőség, ahhoz, hogy A-ból B-be folyhasson áram, legalább egy sorban az összes ellenállásnak működnie kell. Annak valószínűsége, hogy egy rögzített sorban mind az m darab egymástól független ellenállás működik, p^m, tehát

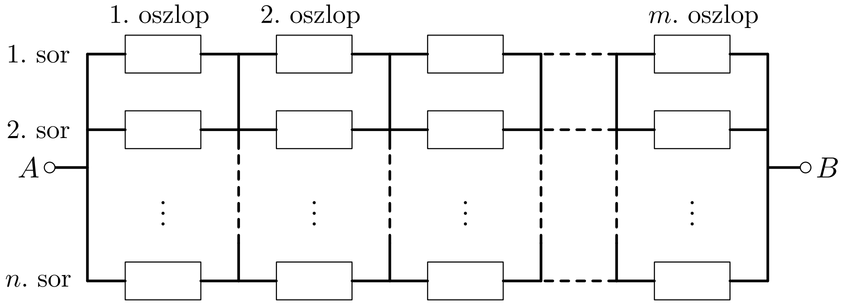
$$P(\text{egy rögzített sorban legalább egy ellenállás nem működik}) = 1 - p^m.$$

Vagyis mivel n darab sor van és a bennük található ellenállások egymástól függetlenek, ezért

$$P(\text{mindegyik sorban legalább egy ellenállás nem működik}) = (1 - p^m)^n.$$

Ez utóbbi eseménynek a komplementere jelenti azt, hogy van olyan sor, amelyben minden ellenállás működik, azaz folyik áram A és B közt, tehát

$$P(A \text{ és } B \text{ közt folyik áram}) = 1 - (1 - p^m)^n. \tag{2.13}$$



2.13. ábra. A 2.16. feladat kapcsolása új vezetékekkel

Most tegyünk újabb vezetékeket a kapcsolásba, mégpedig oszloponként zárjuk rövidre a 2.13. ábra szerint. Ahhoz, hogy ebben a rendszerben A-ból B-be folyhasson áram, szükséges és elégséges, hogy minden oszlopban legalább egy ellenállás működjön. Egy oszlopban n darab ellenállás egymástól függetlenül $1 - p$ valószínűséggel nem működik, tehát

$$P(\text{egy rögzített oszlopban nincs működő ellenállás}) = (1 - p)^n,$$

így

$$P(\text{egy rögzített oszlopban van működő ellenállás}) = 1 - (1 - p)^n.$$

Mivel összesen m darab egymástól független oszlop van, ezért

$$\begin{aligned} P(A\text{-ból } B\text{-be folyik áram}) &= P(\text{minden oszlopban van működő ellenállás}) = \\ &= (1 - (1 - p)^n)^m. \end{aligned} \tag{2.14}$$

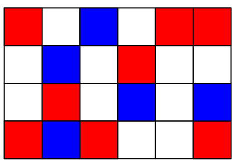
Az ábrák alapján látszik, hogy az első kapcsolás része a másodiknak, tehát a második kapcsolásban legalább akkora valószínűséggel fog áram folyni, így a (2.13) és a (2.14) valószínűségek közt a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$1 - (1 - p^m)^n \leq (1 - (1 - p)^n)^m,$$

melyből átrendezés után a feladat egyenlőtlensége adódik. □

Az OKTV feladat hivatalos megoldási útmutatójában nem ellenállás-hálózat szerepelt, hanem egy n sorból és m oszlopból álló táblázat. Érdemes ezt a gondolatmenetet is végigjárnunk.

A 2.16. feladat II. megoldása. Tekintsünk egy n sorból és m oszlopból álló táblázatot (a 2.14. ábrán az $n = 4, m = 6$ eset látható), melynek celláit egymástól függetlenül p valószínűséggel pirosra, q valószínűséggel kékre színezzük és $1 - p - q$ valószínűséggel fehéren hagyjuk.



2.14. ábra. Színezett táblázat

Határozzuk meg a következő két esemény valószínűségét:

A: a táblázatnak van olyan oszlopa, melyben minden mező kék;

B: a táblázatnak van csupa piros mezőből álló sora.

Annak valószínűsége, hogy egy rögzített oszlopban minden mező kék, q^n, mert n mezőt egymástól függetlenül q valószínűséggel színezünk kékre. Ebből következően annak valószínűsége, hogy egy rögzített oszlop nem csupa kék, $1 - q^n$. Ha ez a táblázat minden oszlopára igaz, akkor az m egymástól független oszlop $(1 - q^n)^m$ valószínűséggel nem csupa kék, ami az A komplementerének valószínűsége, tehát

$$P(A) = 1 - (1 - q^n)^m.$$

A B esemény valószínűsége hasonló gondolatmenettel adódik: annak valószínűsége, hogy egy rögzített sor minden mezője piros, p^m. Ennek komplementer eseményének valószínűsége, azaz hogy egy rögzített sorban van nem piros mező, $1-p^m$. Összesen n sor van a táblázatban, így annak valószínűsége, hogy minden sorban van nem piros mező: $(1-p^m)^n$. Ez a vizsgált B esemény komplementere, így

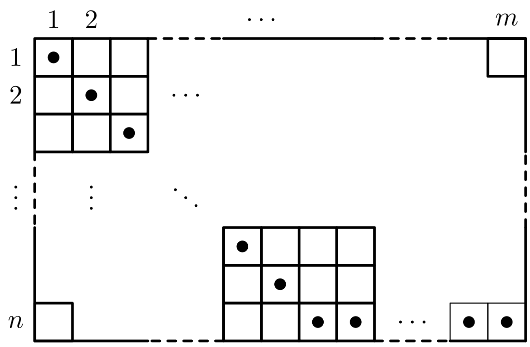
$$P(B) = 1 - (1 - p^m)^n.$$

Az A és B esemény egymást kizárja, ezért valószínűségük összege legfeljebb 1, azaz

$$P(A) + P(B) \leq 1,$$

amiből rendezés után pontosan a feladat egyenlőtlenségét kapjuk. □

2.17. *Megjegyzés.* Az egyenlőtlenség a [10] cikk nyomán élesíthető. Tegyük fel, hogy $n \leq m$ és vezessünk be egy C eseményt a következőképpen: a 2.15. ábrán pöttyökkel jelölt mezőket mind fehéren hagyjuk.



2.15. ábra. Megjelölt mezők az egyenlőtlenség élesítéséhez

Mivel a pöttyökkel jelölt mezőkből alkotott alakzat m mezőből áll, melyek mindegyike $1-p-q$ valószínűséggel fehér, ezért

$$P(C) = (1 - p - q)^m.$$

Vegyük észre, hogy a C esemény A-t és B-t egyaránt kizárja, tehát $P(A) + P(B) + P(C) \leq 1$ teljesül, ami azt jelenti, hogy

$$1 - (1 - p^m)^n + 1 - (1 - q^n)^m + (1 - p - q)^m \leq 1,$$

ahonnan

$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1 + (1 - p - q)^m.$$

Ez az OKTV feladatbeli egyenlőtlenség egy élesítése.

2.4. Módszertani kitekintés

2.4.1. Kerettantervi illeszkedés

Fizika. A fejezetben előforduló fogalmak: áramerősség, feszültség, ellenállás, Ohm-törvény, eredő ellenállás, Kirchhoff törvényei, Rayleigh monotonitási elve.

A fizika A kerettantervben Ohm törvénye, azaz egyszerű áramkörökben az ellenállás, a feszültség és az áramerősség közti kapcsolat először a 9–10. évfolyamon kerül elő, de már a 7–8. évfolyam végén elvárt tudás az elektromos áram fogalma, egyszerű áramkörök tervezése, építése (szimulációkban akár), soros és párhuzamos kapcsolás felismerése, illetve áramerősség- és feszültségmérés. Ebből is látható, hogy az A kerettanterv nem a képletekre helyezi a hangsúlyt, hanem a mindennapi problémák (háztartásbeli hálózatok megtervezése, mérések) köré építi fel a fizika egyes fejezeteit. Akármelyik kerettanterv szerint tanítva a fizikát nagyon lényeges fejlesztendő képesség a mérés, illetve a mért adatok értelmezése, hiszen maga a fizika mint tárgy a környezeti folyamatok, jelenségek mérésén, megfigyelésén alapul, melyekből a törvények, összefüggések felismerhetőek.

Fizikából a B kerettanterv a 7–8. évfolyamon részletesebben tárgyalja az elektromosságtant és az egyenáram témakört, ebben már ekkor elvárt ismeret Ohm törvénye és annak alapján való számolás. A 9–10. évfolyamon ismét előkerül az Ohm-törvény már teljes áramkörre alkalmazva, tehát a tanulónak meg kell tudnia határozni különböző (egyszerű) kapcsolások, hálózatok eredő ellenállását. Természetesen csak soros vagy párhuzamos és ezekből összeállított kapcsolások esetén, mivel a soros vagy párhuzamos blokkokra le nem bontható hálózatok eredő ellenállásának meghatározásához szükség van Kirchhoff törvényeire, ami még az emelt szintű fizika érettségin sem elvárás. A 11. évfolyamon tovább bővül a témakör, ugyanis Ohm törvényét váltóáramú áramkörökben is kell tudni értelmezni. A fejezetben felhasználtuk továbbá Rayleigh monotonitási elvét, ami Kirchhoff törvényeihez hasonlóan a középiskolai fizika kerettantervekben nem szerepel.

Matematika. A fejezetben előforduló fogalmak: számtani, mértani, harmonikus, négyzetes közép, hatványközepek, Milne-, Minkowski-egyenlőtlenség.

Átlagot számolni nagyon hamar megtanulnak a diákok, hiszen félévi és év végi értékelésnél jegyüket (általában) az adott tantárgyi átlaguknak megfelelően kapják. A középszintű matematika kerettantervben a számtani és mértani közép a 9–10. évfolyamon fordul elő először az algebra témakörben definícióként és két pozitív szám esetén a köztük fennálló egyenlőtlenséggel együtt. Később a valószínűségszámítás fejezetben is találkozhatunk ezekkel a fogalmakkal akkor már több számra is felírva, hiszen a statisztikából ismert átlag fogalma megegyezik az adott számok számtani közepével. A középszintű matematika kerettantervben a fejezetben előforduló többi nevezetes középről nem esik szó, mint ahogy a Milne- és Minkowski-egyenlőtlenség sem fordul elő.

Az emelt szintű matematika kerettanterv A változatában már a 9–10. évfolyamon bevezetésre kerül n számra megfogalmazva mind a számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép a köztük fennálló egyenlőtlenséggel együtt. Bizonyítani algebrailag csak két szám esetén kell tudni, emellett alkalmazásuk előfordul a szélsőérték-feladatokban és másodfokú függvények vizsgálatában. Később a geometria témakörén belül két pozitív szám esetén megjelenik a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség geometriai bizonyítása. Az emelt szintű matematika kerettanterv B változata ebben a témakörben kevesebbet jelöl meg, ugyanúgy a 9–10. évfolyamra teszi a számtani és mértani közép és a köztük lévő egyenlőtlenség tárgyalását, két szám esetén megmutatja az algebrai és geometriai bizonyítást is, de nem várja el a harmonikus és a négyzetes közép ismeretét. További nevezetes egyenlőtlenségekkel egy 15 órás fejezetben lehet foglalkozni, a kerettanterv konkrét példákat is említ, de ettől a tanár eltérhet. Érdekesség, hogy ebben a részben említésre kerül a Jensen-egyenlőtlenség, amelyet mi a 3.6. definícióban a konvexitás megfogalmazásakor mondunk majd ki.

Ebből a fejezetből jól látszik, hogy milyen jelentősége van a középiskolai matematikai versenyfelkészítésnek, tehetséggondozásnak, hiszen versenyeken, KöMaL-ban kitűzött feladatokban nagyon sok nevezetes egyenlőtlenség fordul elő, melyek a kerettantervben egyáltalán nem szerepelnek.

2.4.2. Tankönyvi kapcsolódások

Fizika. A fizika B kerettantervnek megfelelően mind a Mozaik Kiadó [9] tankönyve, mind az OFI által kiadott [35] tankönyv 8. évfolyamon tárgyalja az elektromosságtan alapfogalmait, melyek között Ohm törvénye is szerepel. Mindkét tankönyvben elvárt ismeret kapcsolások felrajzolása, felismerése, de maga az eredő ellenállás fogalma és soros kapcsolás esetén a kiszámolása csak a Mozaik Kiadó tankönyvében található meg.

Az OFI a fizika A kerettantervhez is kidolgozott egy tankönyvsorozatot, hasonlóan a matematikához ez az Újgenerációs fizika tankönycsalád. Ennek 8. osztályos [31] tankönyve bár megemlíti Ohm-törvényét, a képlettel való számolás nem elvárás, nincsenek hozzá kapcsolódó feladatok, inkább az áramkörök rajzolásán van a hangsúly. A 9–10. évfolyamon, amikor az elektromosságtan témaköre ismét visszatér, már összetettebb áramkörökben is kell tudni a tanulóknak eredő ellenállást számolni, ahogy azt a könyvekben található kidolgozott példák és feladatok igazolják. Bár mint említettük, Kirchhoff két törvénye emelt szintű fizika érettségin sem tananyag, mégis több példatárban, emelt szintű fizika érettségire készítő feladatsorban találhatóak olyan feladatok, amelyek során szükséges Kirchhoff csomóponti és huroktörvényének ismerete.

Matematika. A 10. osztályos Sokszínű matematika [22] tankönyv a Másodfokú egyenlet című fejezetében vezeti be két pozitív szám számtani és mértani közepét egy-egy speciális középérték-tulajdonságból kiindulva. A köztük fennálló egyenlőtlenséget kimondja n pozitív számra a 2.6. tételhez hasonlóan, de az algebrai bizonyítást csak két szám esetén írja le. Többféle alkalmazást is mutat a tankönyv, nem csak szélsőérték-feladatok témaköréből, többek között előkerül annak igazolása, hogy bármely pozitív szám és reciprokának összege legalább 2. Érdekes a 98. oldal 4. feladata: „Egy autós útjának első felét 50 $\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$, a másik felét pedig 60 $\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$ sebességgel tette meg. Mekkora átlagsebességgel tette meg a teljes utat?” Ennek megoldása ugyanis az átlagsebesség

$$v_{\mathsf{átlag}} = \frac{\text{összes megtett út}}{\text{összes eltelt idő}}$$

képlete alapján az 50 és 60 számok harmonikus közepe. Mivel ez csak kitűzött példa, a tanuló az eredményről csak akkor tudja megmondani, hogy ez a harmonikus közép, ha korábban már hallott erről vagy a tanórán megbeszélték. Fizikából az átlagsebesség fogalma 7. osztályos ismeret, bár ekkor a számolás legfeljebb kiegészítésként, illetve versenyeken fordulhat elő. A 9–10. évfolyamon, amikor a mechanika ismét előkerül, akkor bonyolultabb mozgásoknál is kell tudni átlagsebességet számolni. Erre a fogalomra épít majd a pillanatnyi sebesség, mely tulajdonképp egy nagyon rövid idő alatt ($\Delta t \to 0$) esetén értelmezett átlagsebesség. Később a Geometria című fejezetben megjelenik két pozitív szám számtani és mértani közepe közt fennálló egyenlőtlenség geometriai bizonyítása is, amelynek ide való beillesztése azzal indokolható, hogy a geometriai bizonyításhoz szükséges derékszögű háromszögben a magasságtétel, amit viszont csak akkor tanulnak a diákok.

A Hajdu Sándor által szerkesztett [16] tankönyv Statisztika című fejezetét a nevezetes közepek (számtani, mértani, harmonikus, négyzetes) definiálásával kezdi, de a feladatok közül csupán egy emelt szintű található, melyben az előbbi közepek közt fennálló, a 2.6. tételben megfogalmazott egyenlőtlenség bizonyítását kéri. A kidolgozott feladatokban viszont előkerül egy-egy példa a számtani, mértani és harmonikus közép alkalmazására.

Az OFI által kiadott Újgenerációs matematika tankönyvcsalád a számtani és a mértani közepet 10. osztályban a Középértékek és a négyzetgyök című fejezetében vezeti be. A definíciót két pozitív számra mondja ki, de átlagot több számból is számol (annak kimondása nélkül, hogy ilyenkor a megadott számok számtani közepét határozza meg). A Mértani közép a geometriában című fejezetében ráadásként, azaz emelt szintű anyagként bevezeti két pozitív szám négyzetes és harmonikus közepét is, és kimondja a 2.6. tételben megfogalmazott nevezetes közepek között fennálló egyenlőtlenséget, melyet geometriai úton bizonyít.

3. fejezet

Egyensúly és szélsőérték

A hétköznapokból is jól ismert az energiaminimum elve, melyet egyszerűen úgy fogalmazhatunk meg, hogy minden fizikai rendszer a lehető legkisebb energiájú állapot elérésére törekszik. Ebben a fejezetben három olyan matematikai jellegű szélsőérték-problémát mutatunk be, melyek megoldása az energiaminimum elvére támaszkodva fizikailag is szemléltethető. Először egyenest illesztünk egy adatsorra rugók segítségével, majd a háromszög súlypontjának egy nem túl közismert maximumtulajdonságát igazoljuk az elektrosztatikus egyensúly felírásával, továbbá egy középiskolai tankönyvi matematikafeladathoz is mutatunk egy fizikai meggondolást kötelekre akasztott tömegekkel.

3.1. Lineáris regresszió

A lineáris regresszió többnyire a statisztikában, valamint mérések kiértékelésekor kerül elő hasznos módszerként, amikor is a következő feladatot kell megoldani.

Adott n adatpár az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koordinátákkal (a 3.1. ábrán pontokkal jelölve), és keressük meg ekkor annak az egyenesnek az egyenletét, amely „legjobban illeszkedik” a megadott pontokra. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Ekkor az, hogy az $y = ax+b$ egyenletű egyenes „legjobban illeszkedik” a megadott pontokra, matematikailag jelentse azt, hogy az

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2 \tag{3.1}$$

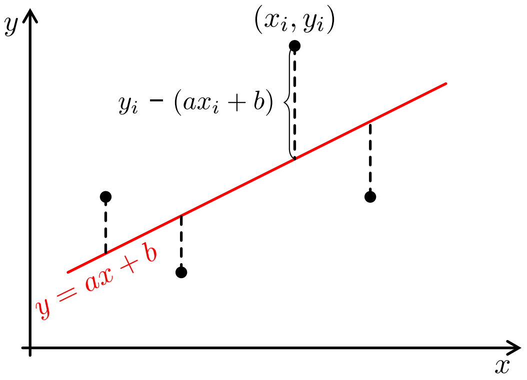
négyzetes eltérés minimális.

3.1.1. Matematikai megoldás

Keresendő tehát a (3.1) képlettel értelmezett kétváltozós S függvény abszolút minimumhelye (ha egyáltalán van). Mivel az S függvény $\mathbb{R}^2$-en van értelmezve, így bármely globális minimuma egyben lokális minimum is. Elevenítsük fel kétváltozós függvényekre vonatkozóan lokális szélsőérték létezésének szükséges feltételét!

3.1. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)**.** *Tegyük fel, hogy a kétváltozós f függvény értelmezve van az (a, b) $\mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha az f-nek az (a, b) pontban lokális szélsőértéke van és itt mindkét változó szerinti parciális deriváltja létezik, akkor*

$$\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 0.$$



3.1. ábra. Egyenesillesztés

A tétel bizonyítása megtalálható a [29] jegyzetben.

Mivel az S függvény kétváltozós polinom, ezért minden pontban akárhányszor differenciálható, így léteznek az elsőrendű parciális deriváltjai, mégpedig:

$$\partial_1 S(a,b) = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b))x_i,$$
$$\partial_2 S(a,b) = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b)).$$

Ha S-nek az (a,b) pontban lokális szélsőértéke van, akkor a $\partial_1 f(a,b) = \partial_2 f(a,b) = 0$ feltételből a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

A második egyenletből a b ismeretlent kifejezve adódik, hogy

$$b = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

amit az első egyenletbe helyettesítve:

$$a\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{3.3}$$

Itt a bal oldal második tényezője pozitív, aminek belátásához alkalmazzuk az 1.7. tételben szereplő Csebisev-egyenlőtlenséget az $m_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ szereposztással. Mivel az (x_i) sorozat szigorúan monoton növő, így a Csebisev-egyenlőtlenségben egyenlőség nem teljesülhet. A szóban forgó pozitív tényezővel osztva a (3.3) egyenlet bal oldalát megkapjuk a értékét:

$$a = \frac{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{3.4}$$

Ezután már b értéke is megadható:

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{3.5}$$

A (3.1) egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát a (3.4)–(3.5) számpár, melyre a továbbiakban az $(a\ , b\ )$ jelölést fogjuk használni.

A kapott $(a\ , b\ )$ pont csupán egy lehetséges lokális szélsőértékhelye az S függvénynek, ám nem biztos, hogy itt valóban lokális szélsőérték van. Egyetlen lehetséges globális szélsőértékhely is egyben, mert S minden globális szélsőértékhelye egyúttal lokális is. Annak megállapításához, hogy valóban lokális szélsőértékhelyről van-e szó, a lokális szélsőérték létezésének egy elégséges feltételét célszerű felidézni, amihez szükségünk van a második derivált mátrix fogalmára és bizonyos tulajdonságaira. Az előkerülő tételek bizonyítása megtalálható a [29] jegyzetben.

3.2. Definíció. Legyen az f kétváltozós függvény kétszer differenciálható az (a, b) $\mathbb{R}^2$ pontban (azaz az (a, b) pont egy környezetében léteznek a $\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)$ parciális deriváltak és az így kapott parciális deriváltfüggvények differenciálhatóak az (a, b) pontban). Ekkor az f *második derivált mátrixa*, másnéven *Hesse-mátrixa* az (a, b) pontban:

$$H(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a, b) & \partial_2\partial_1 f(a, b) \\ \partial_1\partial_2 f(a, b) & \partial_2^2 f(a, b) \end{pmatrix}.$$

A Hesse-mátrix fontos tulajdonsága, hogy szimmetrikus.

3.3. Tétel (Young)**.** *Ha a kétváltozós f függvény kétszer di erenciálható az (a, b) $\mathbb{R}^2$ pontban, akkor $\partial_1\partial_2 f(a, b) = \partial_2\partial_1 f(a, b)$, tehát a $H(a, b)$ Hesse-mátrix szimmetrikus.*

Szimmetrikus mátrixok esetén szokás bevezetni a különböző definitségek fogalmát.

3.4. Definíció. Legyen $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix. Azt mondjuk, hogy az A mátrix

- *pozitív definit*, ha $\det A > 0$ és $\alpha > 0$;
- *pozitív szemidefinit*, ha $\det A \geq 0$ és $\alpha \geq 0$;
- *negatív definit*, ha $\det A > 0$ és $\alpha < 0$;
- *negatív szemidefinit*, ha $\det A \geq 0$ és $\alpha \leq 0$;
- *indefinit*, ha $\det A < 0$.

Most már készen állunk a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó elégséges feltétel kimondására.

3.5. Tétel (Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)**.** *Tegyük fel, hogy a kétváltozós f függvény kétszer di erenciálható az (a, b) $\mathbb{R}^2$ pontban és $\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 0$.*

1. *Ha a $H(a,b)$ Hesse-mátrix pozitív (negatív) definit, akkor az f-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van az (a,b) pontban.*

2. *Ha a $H(a,b)$ Hesse-mátrix indefinit, akkor az f függvénynek az (a,b) pontban nincs lokális szélsőértéke.*

Határozzuk meg az S függvény másodrendű parciális deriváltjait és írjuk fel a Hesse-mátrixát! Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_1^2 S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$
$$\partial_1\partial_2 S(a,b) = \partial_2\partial_1 S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$
$$\partial_2^2 S(a,b) = n.$$

Ebből következően az S függvény Hesse-mátrixa minden (a,b) $\mathbb{R}^2$ pontban a következő alakot ölti:

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa,

$$\det H = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

pozitív, amit már a (3.2) egyenletrendszer megoldásakor igazoltunk. A Hesse-mátrix bal felső eleme az x_i értékek különbözősége miatt pozitív (hiszen csak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ esetén lehetne nulla), ezért az S függvény Hesse-mátrixa pozitív definit. Ekkor a 3.5. tétel szerint az S függvénynek a lokális szélsőérték szükséges feltételéből kapott $(a\ ,b\ )$ pontban szigorú lokális minimuma van. Kétváltozós függvényeknél általában nem következik ebből, hogy ez a lokális minimum egyben globális minimum is, viszont most kihasználhatjuk az S függvény egy speciális tulajdonságát, mégpedig azt, hogy az egész síkon konvex. Az egyszerűség kedvéért a konvexitás fogalmát csak az egész $\mathbb{R}^2$-en értelmezett függvényekre mondjuk ki.

3.6. Definíció. Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha minden x_1, x_2 $\mathbb{R}^2$ és minden t $[0,1]$ esetén

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

A konvexitás kétszer differenciálható függvény esetén a Hesse-mátrixról is leolvasható, erről szól a következő tétel, melynek bizonyítása ugyancsak a [29] jegyzetben olvasható.

3.7. Tétel. *Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mindenütt kétszer di erenciálható. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha a Hesse-mátrixa minden pontban pozitív szemidefinit.*

Konvex függvények esetén bármely lokális minimumhely egyben globális minimumhely is.

3.8. Tétel. *Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Ha f-nek valamely x_0 pontban szigorú lokális minimuma van, akkor az x_0 pont szigorú globális minimumhely is egyúttal.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek az x_0 R^2 pontban szigorú lokális minimuma van. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy az x_0 pont egy δ sugarú pontozott környezetében minden függvényérték nagyobb, mint $f(x_0)$, vagyis $f(y) > f(x_0)$, ha $0 < |y - x_0| < \delta$. Indirekt módon tegyük fel, hogy x_0 nem szigorú globális minimumhely, azaz létezik olyan $x_1 = x_0$ pont, melyre

$$f(x_0) \geq f(x_1). \tag{3.6}$$

Tekintsük ekkor az $y = tx_0 + (1 - t)x_1$ pontot, ahol t $(0, 1)$. Mivel

$$|y - x_0| = |tx_0 + (1 - t)x_1 - x_0| = |1 - t||x_0 - x_1|,$$

ezért ha $|1 - t|$ elég kicsi és pozitív, akkor $0 < |1 - t||x_0 - x_1| < \delta$, és így y benne van az x_0 pont δ sugarú pontozott környezetében. Rögzítsük most az $y = x_0$ pontot ezzel a tulajdonsággal. A konvexitás definíciója alapján

$$f(y) = f(tx_0 + (1 - t)x_1) \leq tf(x_0) + (1 - t)f(x_1),$$

ahonnan a (3.6) indirekt feltevés alkalmazásával kapjuk, hogy

$$f(y) \leq tf(x_0) + (1 - t)f(x_1) \leq tf(x_0) + (1 - t)f(x_0) = f(x_0).$$

Az egyenlőtlenségláncból $f(y) \leq f(x_0)$ adódott, ahol $0 < |y - x_0| < \delta$, ami ellentmond annak, hogy az x_0-ban szigorú lokális minimuma van az f-nek. □

A (3.1) formulával értelmezett S függvényről már megmutattuk, hogy a Hesse-mátrixa minden (a, b) R^2 pontban pozitív szemidefinit, így a 3.7. tétel szerint S konvex.

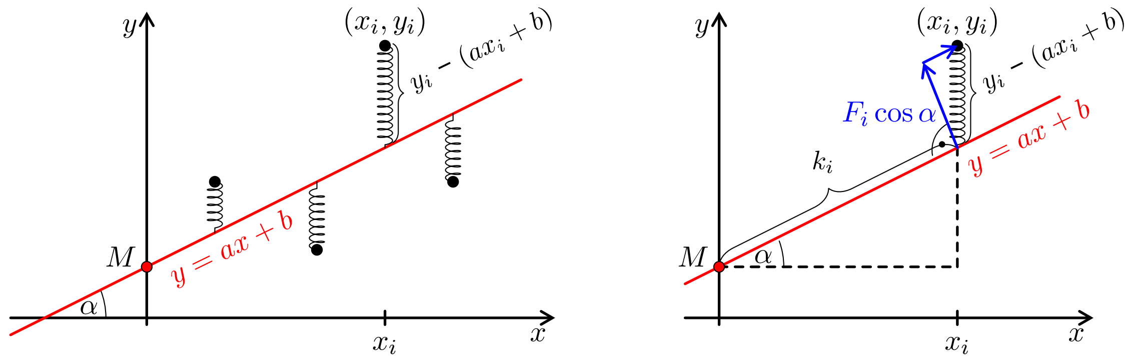
Összefoglalva azt kaptuk, hogy az S függvénynek a (3.4) és (3.5) összefüggések által meghatározott $(a\ , b\ )$ pontban szigorú lokális minimuma van, és mivel S az egész R^2 síkon konvex, ezért ez egyben szigorú globális minimumhelye is. Visszatérve a kiindulási feladatra, melyben a megadott és a 3.1. ábrán szemléltetett (x_i, y_i) adatpontokra kerestük a „legjobban illeszkedő” egyenes egyenletét, az S függvény globális minimumhelyének megtalálásával azt kaptuk, hogy a feltételnek megfelelően legjobban illeszkedő egyenes egyenlete: $y = a\ x + b\ $.

3.1.2. Egyenesillesztés rugókkal

A következőkben a lineáris regresszió alapfeladatát fizikai tartalommal ruházzuk fel. A [24] könyv alapján tekintsük a 3.2a. ábrán látható mechanikai rendszert! Az xy síkon legyenek rögzítettek az (x_i, y_i) adatpontok, majd mindegyikhez kössünk egy kezdetben nulla hosszúságú rugót. A rugók másik végét rögzítsük az ábrán pirossal jelölt elhanyagolható tömegű rúdhoz úgy, hogy mindegyik rugó csak az y tengellyel párhuzamosan tudjon megnyúlni.

Egy rugó potenciális energiája $E = \frac{1}{2}Dl^2$, ahol D a rugóállandó, l pedig a rugó megnyúlt hossza. Látható, hogy a potenciális energia arányos a rugó hosszának négyzetével. Mivel az (x_i, y_i) pontban lévő rugónál $l_i = y_i - (ax_i + b)$, továbbá az egész rendszer potenciális energiája az egyes rugók potenciális energiáinak összege, ezért a rendszer potenciális energiája:

$$E(a, b) = \sum_{1=1}^{n} \frac{1}{2} D\big(y_i - (ax_i + b)\big)^2.$$



(a) Egyensúlyi helyzet (b) Forgatónyomaték meghatározása

3.2. ábra. Egyenesillesztés rugókkal

Ahogy a fejezet bevezetésében utaltunk rá, a természetben minden rendszer az energiaminimumra törekszik, így a rúd egyensúlyi helyzetében lesz a rendszer összes potenciális energiája minimális.

Vegyük észre, hogy az $E(a, b)$ függvénynek pontosan akkor van minimuma, amikor a (3.1) formulával értelmezett $S(a, b)$ függvénynek, hiszen csupán egy pozitív szorzótényezőben térnek el egymástól.

Tegyük fel, hogy a 3.2b. ábrán pirossal jelölt rúd az M pont körül súrlódásmentesen el tud fordulni, és ezt felhasználva írjuk fel rá az egyensúly feltételét.

Ha a rúd mint merev test az egyensúlyi helyzetben éppen α szöget zár be a vízszintessel (az x tengellyel), akkor az egyensúlyához két feltételnek kell teljesülnie. Egyrészt a rá ható erők eredője legyen nulla:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \tag{3.7}$$

ahol F_i az i-edik rugó által kifejtett erő, ami Hooke törvénye szerint a rugó megnyúlásával arányos, és az arányossági tényező a rugóállandó, tehát $F_i = D(y_i - (ax_i + b))$. Másrészt pedig a rúdra ható erők forgatónyomatékainak eredője legyen nulla, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} k_i F_i \cos\alpha = 0, \tag{3.8}$$

ahol k_i az F_i erőhöz tartozó erőkar, a $\cos\alpha$ szorzó pedig azért szükséges, mert az erőnek csak a rúdra merőleges komponense fejt ki forgató hatást. Ha az i-edik adatponthoz rögzített függőleges rugó az x_i abszcisszájú helyen van, akkor a hozzá tartozó erőkar $k_i = \dfrac{x_i}{\cos\alpha}$. Behelyettesítve az erők és erőkarok nagyságát a (3.7) és (3.8) egyenletekbe a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D(y_i - (ax_i + b)) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\cos\alpha} D(y_i - (ax_i + b)) \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Itt D-vel való egyszerűsítés és a zárójelek felbontása után az a és b számokra az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \end{cases}$$

Ez pontosan megegyezik az előző szakaszban tárgyalt és pusztán matematikai úton kapott (3.2) egyenletrendszerrel, amelyet ezáltal tehát fizikai jelentéssel ruháztunk fel. A (3.2) egyenletrendszer első egyenlete tehát fizikailag a forgatónyomatékok kiegyenlítődését jelenti, míg a második egyenlet az erők kiegyenlítődését fejezi ki.

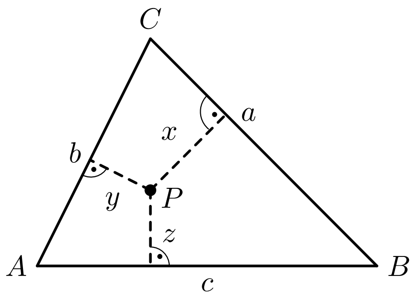
3.2. Elektrosztatikus egyensúly

Ebben a szakaszban a háromszög egy speciális tulajdonsággal rendelkező belső pontját keressük meg először pusztán matematikai eszközökkel, majd mutatunk rá egy fizikai törvényeken alapuló okoskodást.

3.2.1. Háromszög súlypontjának egy érdekes tulajdonsága

A következő feladat a KöMaL 2014. májusi számában jelent meg B. 4636. jelzéssel, a feladatot Kósa Tamás tűzte ki.

3.9. Feladat. Egy háromszög melyik belső pontjában maximális az oldalaktól mért távolságok szorzata?



3.3. ábra. Háromszög belső pontjának távolsága az oldalaktól

Az általunk ismertetett megoldás Szőke Tamás dolgozatán alapul. Tekintsük a 3.3. ábrán látható ABC háromszöget, melynek oldalai a szokásos jelölésekkel a, b, c, továbbá legyen P egy belső pontja, melynek a háromszög oldalaitól mért távolsága rendre x, y, z. Az ABP háromszög területe $\frac{cz}{2}$, hiszen az $AB = c$ oldalhoz tartozó magassága z, hasonlóan a BCP háromszög területe $\frac{ax}{2}$, a CAP háromszög területe pedig $\frac{by}{2}$. Ezen három háromszög területének összege éppen az eredeti ABC háromszög T területét adja, tehát

$$ax + by + cz = 2T.$$

Mivel egy háromszög oldalairól, illetve távolságokról van szó, az előbbi mennyiségek értékei nemnegatívak, ezért felírhatjuk az ax, by és cz számok számtani és mértani közepei közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{ax + by + cz}{3} \geq \sqrt[3]{axbycz} = \sqrt[3]{xyz \cdot abc}. \tag{3.9}$$

Vegyük észre, hogy az iménti egyenlőtlenségnek a jobb oldala a P pont helyzetétől függetlenül állandó, mégpedig az ABC háromszög területének $\frac{2}{3}$-a, így

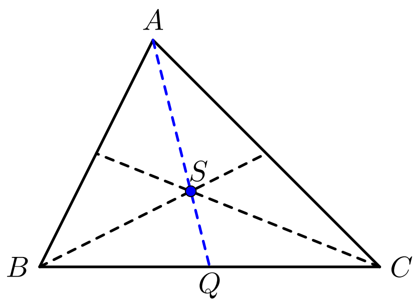
$$\frac{2}{3}T \geq \sqrt[3]{xyzabc}.$$

A 2.6. tétel szerint a nevezetes közepek közötti (3.9) egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $ax = by = cz$. Ekkor $\frac{ax}{2} = \frac{by}{2} = \frac{cz}{2} = \frac{T}{3}$, azaz az ABP, a BCP és a CAP háromszögek területe megegyezik, mindegyik harmada az ABC háromszög területének. Ha létezik ilyen P pont, akkor a keresett xyz szorzat maximális értéke

$$\frac{8T^3}{27abc}.$$

Belátjuk, hogy pontosan egy olyan P pont van, melyre az előbb említett tulajdonság teljesül. Legyen az ABC háromszög a oldalhoz tartozó magassága m_a, hasonlóan a többi magassága m_b és m_c. Mivel $\frac{ax}{2} = \frac{T}{3}$, ezért a P pontnak rajta kell lennie a BC oldallal párhuzamos, attól $\frac{m_a}{3}$ távolságban lévő, az ABC háromszög másik két oldalát metsző egyenesen. Hasonlóan P rajta van az AC oldallal párhuzamos, attól $\frac{m_b}{3}$ távolságra lévő, valamint az AB oldallal párhuzamos, attól $\frac{m_c}{3}$ távolságra lévő és a másik két oldalt metsző egyenesen. Mivel a háromszög három oldalegyenese nem párhuzamos, nem lehetséges, hogy az előbbi egyenesek közül valamely kettő egybeesik, így legfeljebb egy olyan pont van, melyen mindhárom egyenes átmegy. Megmutatjuk, hogy ilyen pont létezik, mégpedig ez a háromszög súlypontja.

A 3.4. ábrán látható, hogy a háromszög a oldalához tartozó súlyvonal az ABC háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja, mert a QCA és a BQA háromszög magassága is megegyezik az ABC háromszög m_a magasságával, a hozzá tartozó alapjuk viszont feleakkora. Ez hasonlóan elmondható a többi oldalhoz tartozó súlyvonalra is. Az S súlypont a súlyvonalat harmadolja, ezért az SQC és a BQS háromszög területe hatoda az ABC háromszög területének, hiszen magasságuk $\frac{m_a}{3}$, a hozzá tartozó oldaluk pedig $\frac{a}{2}$. Ebből következik, hogy a háromszög három súlyvonala az eredeti háromszöget hat egyenlő területű háromszögre bontja.



3.4. ábra. Súlyvonalak

Összefoglalva tehát a háromszög súlypontja az a pont, melyre a háromszög oldalaitól mért távolságok szorzata maximális.

3.2.2. Fizikai szemléltetés

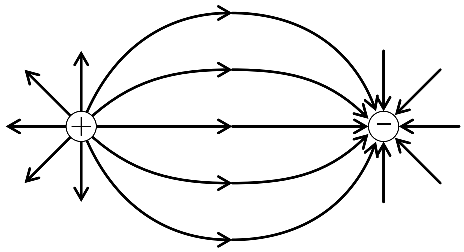
Az előző részben tárgyalt feladat fizikai szemléltetéséhez egy látszólag teljesen távolinak tűnő fizikafeladatból indulunk ki. A KöMaL 2014. májusi számában P. 4648. jelzéssel, Kósa Tamás ötlete alapján Vass Miklós tűzte ki ezt a példát.

3.10. Feladat. Három, végtelen hosszúnak tekinthető, egy síkban lévő, egymást egy tetszőleges háromszögben keresztező vékony szigetelőpálcát egyenletesen, azonos töltéssűrűséggel feltöltünk. Hová helyezhetünk el egy ponttöltést, hogy egyensúlyban legyen?

A feladatot először a ponttöltésre ható erőknek az egyensúlyi helyzetbeli egymást kiegyenlítő hatását felhasználva oldjuk meg. Ezután pedig az elektromos potenciál bevezetésével az energiaminimum elvére támaszkodva megmutatjuk, hogy a feladat ekvivalens az előző szakaszban kitűzött 3.9. feladattal.

Egyensúly elektromos térben

A feladat megoldásához elevenítsük fel a szükséges fizikai mennyiségeket, összefüggéseket! Töltések maguk körül elektromos erőteret hoznak létre, ami olyan erővonalakkal szemléltethető, amelyek a pozitív töltésekből a negatív töltések felé mutatnak (lásd a 3.5. ábrát).



3.5. ábra. Elektromos mező szemléltetése erővonalakkal

Az elektromos térerősségvektor a tér minden pontjában az erővonalak érintője. Ha egy q töltést bármilyen $\underline{E}$ térerősségű elektromos erőtérbe helyezünk, a tér $\underline{F} = q\underline{E}$ erővel fog hatni a töltésre, tehát a térerősség az elektromos teret erőkifejtő képessége szempontjából jellemzi. Egy ponttöltés akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője nulla, azaz a feladat során azt kell meghatározni, hogy a háromszög oldalait adó pálcák által létrehozott elektromos erőterek milyen erővel hatnak a ponttöltésre. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy más erő nem hat a ponttöltésre. Egy végtelen hosszú egyenes szigetelő által létrehozott elektromos térerősség nagysága az egyenestől r távolságban

$$E(r) = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{3.10}$$

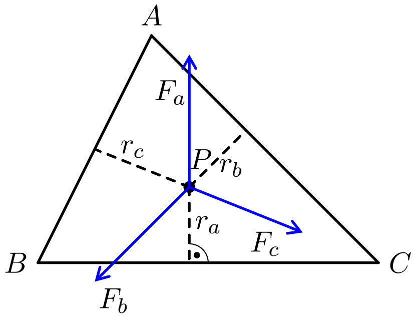
ahol η a vonalmenti töltéssűrűség (ez a feladatban az egyenletes töltöttség miatt állandó) és ε_0 a vákuum dielektromos állandója. A térerősségvektor a pálca felé mutat, ha az negatívan van feltöltve, illetve sugárirányban kifelé mutat, ha a pálca pozitív töltésű. Ennek levezetése az elektromosságtan egyik alapvető tételének, a Gauss-tételnek a segítségével megtalálható többek között a [18] könyvben.

A 3.6. ábrán kékkel rajzolt erőkkel hatnak a pálcák a ponttöltésre, mely a háromszög három oldalától rendre r_a, r_b, r_c távolságra van. Egyensúly esetén a ponttöltésre ható erők eredője nulla, amit másképp úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a három erővektor zárt háromszöget alkot a 3.7. ábra szerint. Mivel mindegyik erő merőleges az ABC háromszög megfelelő oldalára, így a 3.7. ábrán látható háromszög az eredetihez hasonló, tehát az oldalak aránya megegyezik, azaz

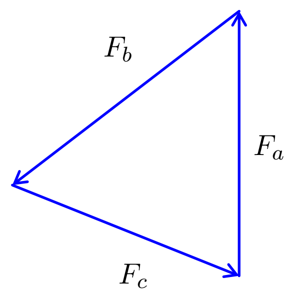
$$\frac{F_a}{a} = \frac{F_b}{b} = \frac{F_c}{c}.$$

Írjuk be ebbe az erők nagyságát a (3.10) összefüggés szerint. Ekkor

$$\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r_a a} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r_b b} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r_c c},$$



3.6. ábra. Ponttöltésre ható erők



3.7. ábra. Erőháromszög

amiből egyszerűsítés után a következőt kapjuk:

$$r_a a = r_b b = r_c c.$$

Ez azt jelenti, hogy a ponttöltés a háromszög olyan P pontjában van egyensúlyban, melyre az ABP, a BCP és a CAP háromszög területe megegyezik, azaz a háromszög csúcsaiból a P pontba húzott szakaszok az eredeti ABC háromszöget három egyenlő területű háromszögre bontják. Az előző szakaszban a 3.9. feladat megoldása során megmutattuk, hogy ilyen pont egyértelműen létezik a háromszög belsejében, mégpedig a háromszög súlypontja az, amelyre ez a tulajdonság teljesül.

3.11. *Megjegyzés.* Bár nem reális egy végtelen hosszú szigetelőpálca, a feladat megoldásához mégis szükséges ez a fajta idealizáció, hogy a Gauss-tétel alapján egyszerűen lehessen számolni az elektromos erőteret. Amennyiben a pálca véges hosszúságú, az egyszerű képlet helyett egy összetettebb integrál kiszámításával határozható csak meg a térerősség.

Elektromos potenciál minimuma

A 3.10 feladatot szélsőérték-feladatként is meg lehet oldani, ha bevezetjük az elektromos potenciál fogalmát. Láttuk, hogy a töltések maguk körül elektromos teret hoznak létre, amely más töltésekre erőt fejt ki. Ezáltal egy próbatöltésnek a tér valamely rögzített pontjából a tér egy másik pontjába történő mozgatásához munkavégzés szükséges, tehát a töltésekhez helyzetüknél fogva elektromos potenciális energia rendelhető. A potenciális energiát (lásd még a 3.3.2 alszakaszban) mindig valamilyen nullszinthez képest adjuk meg (elektrosztatikában kényelmi szempontok miatt ez gyakran a végtelenben szokott lenni). Tehát az ***elektromos potenciál*** (eletromos potenciális energia) megfeleltethető annak a munkának, amely ahhoz szükséges, hogy a töltést a referencia pontból az adott pontba vigyük. Az elektromos potenciál részletes tárgyalása megtalálható a [18] könyvben. Nekünk most csak arra az esetre van szükségünk, hogy egy végtelen hosszú, egyenletesen töltött szigetelő pálca potenciálja attól r távolságban

$$U(r) = k_1 \ln r + k_2,$$

ahol $k_1 < 0$ és $k_2 \in \mathsf{R}$ megfelelő konstansok, melyek a töltéssűrűségtől, a közegtől és a potenciál választott nullszintjétől függenek. Több töltés által létrehozott potenciál összeadódik, tehát a ponttöltés potenciálja a három azonos töltéssűrűséggel töltött pálca esetén

$$U_{\mathsf{eredő}} = U_a + U_b + U_c = k_1 \ln(r_a r_b r_c) + 3k_2. \tag{3.11}$$

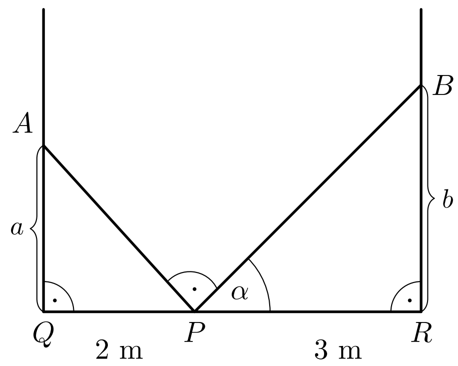
A fejezet bevezetőjében megfogalmazott energiaminimum elve szerint a ponttöltés egyensúlyban úgy helyezkedik el, hogy potenciálja minimális, azaz a (3.11) összefüggés minimumát kell megkeresni. Ez k_1 negativitása miatt egyenértékű azzal, hogy a ponttöltés háromszög oldalaitól vett távolságainak szorzata legyen maximális. Tehát a 3.10. feladat az energiaminimum elve szerint megegyezik a 3.2.1. alszakaszban tárgyalt 3.9. feladat kérdésével.

3.3. Egy középiskolai szélsőérték-feladat

Most a Mozaik Kiadó Sokszínű Matematika, Az analízis elemei című 11–12. osztályosoknak készült [13] tankönyvéből mutatunk be egy szélsőérték-feladatot, melyet először a tankönyv gondolatmenetét követve deriválás alkalmazásával oldunk meg. A rákövetkező alszakaszban pedig mutatunk egy fizikai megoldást is kötelekre akasztott tömegek segítségével.

3.3.1. Matematika-tankönyvi példa

3.12. Feladat. Egy szoba 5 méter széles fala néz az utcára. Az ablakok és az erkélyajtó miatt csak az egyik faltól 2 méterre helyezhetjük el a mozgásérzékelőt (lásd a 3.8. ábrát). Azt szeretnénk, hogy az $a + b$ a lehető legkisebb legyen. Mekkora α szögben állítsuk be a szenzort, ha az érzékelő derékszögű térrészt képes figyelni?



3.8. ábra. Érzékelő által belátott rész

Írjuk fel α függvényében a minimalizálandó $a + b$ összeget! A QPA derékszögű háromszögben $QPA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, ezért $PAQ\sphericalangle = \alpha$, tehát $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{2}$, továbbá a PRB derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{3}$, tehát

$$a + b = 2\operatorname{ctg}\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha.$$

Feltehető, hogy $\alpha > 0$, mert $\alpha = 0$ esetén az érzékelő teljesen a b oldal felé fordulva az a oldalt nem is látná, tehát lényegében $a = \infty$ lenne, ami az $a + b$ összeg minimalizálása szempontjából figyelmen kívül hagyható. Hasonlóan $\alpha < \frac{\pi}{2}$, mert $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetén az érzékelő az a oldalt látja csak, a b oldalt pedig nem. Tekintsük tehát az

$$f\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathsf{R}, \quad f(\alpha) = 2\operatorname{ctg}\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha \tag{3.12}$$

függvényt, mely α függvényében megadja $a + b$ értékét, a feladat szerint célunk ennek minimumát (ha van) megtalálni. Ehhez idézzük fel a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltételét!

3.13. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)**.** *Tegyük fel, hogy a g egyváltozós függvény értelmezve van az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ha g-nek x_0-ban szélsőértéke van és g deriválható ebben a pontban, akkor $g'(x_0) = 0$.*

A (3.12) formulával értelmezett f függvény az értelmezési tartományán differenciálható, így ott lehet lokális szélsőértéke, ahol

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

Közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{3\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 0,$$

így a tört értéke pontosan akkor nulla, ha

$$3\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = 0, \tag{3.13}$$

azaz $3\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha$. Az f értelmezési tartományán $\sin \alpha > 0$ és $\cos \alpha > 0$, ezért ekvivalens lépés a gyökvonás,

$$\sqrt{3}\sin \alpha = \sqrt{2}\cos \alpha,$$

ahonnan $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Jelölje ennek a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumba eső megoldását

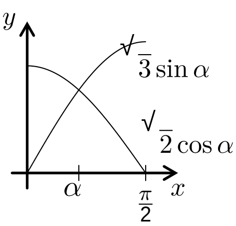
$$\alpha^* = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Belátjuk, hogy az α^* az f függvény lokális szélsőértékhelye, sőt egyben globális minimumhelye is. Ennek igazolásához az f függvény szigorú monotonitását fogjuk vizsgálni a derivált segítségével.

3.14. Tétel (Szigorú monotonitás és a derivált kapcsolata)**.** *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum. Tegyük fel, hogy a $g\colon I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n és differenciálható I belsejében. Ekkor:*

- *ha $g' > 0$ az I belsejében, akkor g szigorúan monoton növő I-n;*
- *ha $g' < 0$ az I belsejében, akkor g szigorúan monoton csökkenő I-n.*

A tétel bizonyítása megtalálható a [25] könyvben. Adjuk meg most az f függvény monotonitási szakaszait az f' derivált előjelének vizsgálatával! Ekkor a lokális szélsőértékhely megkeresésekor már előfordult $3\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha$ algebrai kifejezés előjelét kell meghatározni. Az f függvény értelmezési tartományán ezzel ekvivalens, ha a $\sqrt{3}\sin \alpha - \sqrt{2}\cos \alpha$ kifejezést előjelét adjuk meg. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $\sqrt{3}\sin \alpha$ és a $\sqrt{2}\cos \alpha$ függvényeket (lásd a 3.9. ábrát).



3.9. ábra. A $\sqrt{3}\sin \alpha$ és $\sqrt{2}\cos \alpha$ függvények

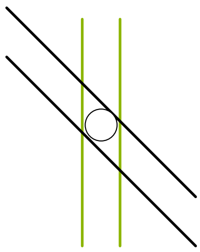
Megállapíthatjuk, hogy ha $\alpha < \alpha$, akkor $\sqrt{3}\sin\alpha < \sqrt{2}\cos\alpha$, így $f'(\alpha) < 0$, tehát ebben az esetben f szigorúan monoton csökkenő. Hasonlóan kapjuk, hogy $\alpha > \alpha$ esetén a deriváltfüggvény pozitív, így az f függvény szigorúan monoton növő. Mindezek alapján α az f függvény szigorú globális minimumhelye. Ekkor

$$f(\alpha\ ) = 2\operatorname{ctg}\alpha\ + 3\operatorname{tg}\alpha\ = 2{,}45 + 2{,}45 = 4{,}9.$$

Tehát $\alpha\ = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}68 \approx 38{,}96^\circ$ esetén a lehető legkisebb az érzékelő által be nem látott falszakasz hossza, és ez a lehető legkisebb érték 4,9 méter.

3.3.2. Megoldás a fizika segítségével

A 3.12. feladat fizikai megoldásához a [21] prezentációban szereplő ötletből indulunk ki. Helyettesítsük a 3.8. ábrán a QA és RB, valamint a PA és PB félegyeneseket egy-egy végtelen hosszú sínpárral oly módon, hogy a metszetükbe görgőt teszünk a 3.10. ábrának megfelelően úgy, hogy a görgő a sínpárok között szabadon el tud gördülni. Ennek a mechanikai szerkezetnek az a lényege, hogy a 3.10. ábrán feketével és a zölddel jelölt két sínpár úgy tud egymáson súrlódásmentesen elmozdulni, hogy a szögük változhat közben, ezt segíti a metszetükben elhelyezett görgő. Feltételezzük továbbá, hogy a PA és PB végtelen sínek által bezárt derékszög állandó és a két sín csak együtt tud elfordulni a P pont körül.



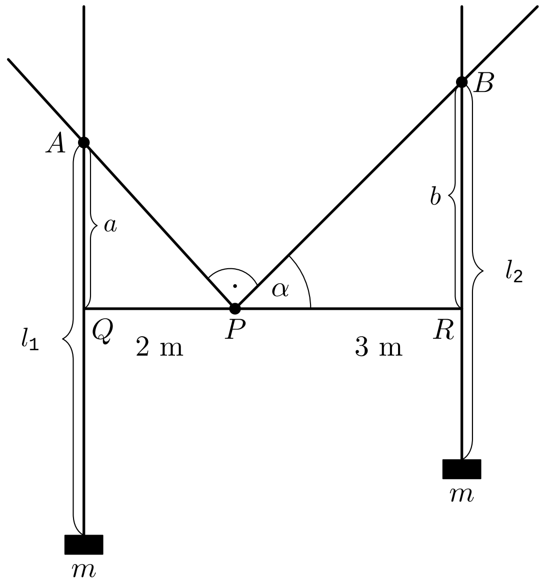
3.10. ábra. Sínek és görgő

Akasszunk az egyik görgőre l_1, a másik görgőre l_2 hosszúságú kötelet, melyek végére egy-egy m tömeget helyezünk és hagyjuk magára a rendszert, a 3.11. ábrán ezt a helyzetet tüntettük fel. Az energiaminiumra való törekvés miatt a rendszer olyan egyensúlyi helyzetet vesz fel, melyben a két tömeg összes potenciális (helyzeti) energiája minimális. Az elektromos potenciális energiáról már volt szó a 3.2.2. alszakaszban, és ahhoz hasonlóan értelmezhető a mechanikai potenciális (helyzeti) energia. Szükséges egy nullszint, amelyhez viszonyítva egy h magasságban lévő (ha a test a nullszint alatt van, akkor $h < 0$) m tömegű test potenciális energiája $E_{\text{pot}} = mgh$.

Legyen most a potenciális energia nullszintje a QR egyenes, és tegyük fel, hogy a görgők az egyensúlyi helyzetben a 3.11. ábrán jelölt módon az A és B pontokban helyezkednek el. Ekkor a kötelek végére akasztott két tömeg összes potenciális energiája

$$E_{\text{pot}} = E_1 + E_2 = -(l_1 - a)mg - (l_2 - b)mg = (a + b)mg - (l_1 + l_2)mg.$$

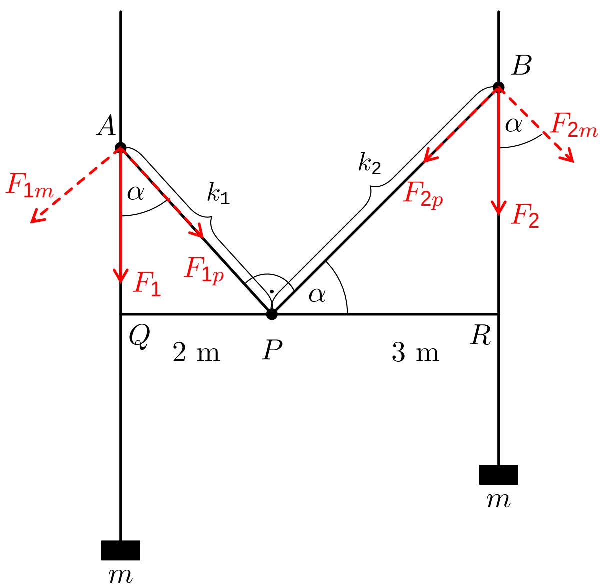
Az energiaminimum elve szerint a rendszer úgy fog beállni egyensúlyi helyzetbe, hogy ez az E_{pot} érték minimális. Vegyük észre, hogy mivel $l_1 + l_2$ állandó, ezért az előbbi kifejezésnek pontosan akkor



3.11. ábra. A 3.12. feladathoz tartozó rendszer egyensúlyi helyzetében

van minimuma, amikor az $a + b$ összeg minimális, tehát ha meghatározzuk a rendszer egyensúlyi helyzetét, megkapjuk a 3.12. feladat megoldását.

Tegyük fel, hogy a kötelek ideálisak, azaz nyújthatatlanok és nincs saját tömegük. Ekkor a tömegek súlyerejét a kötelek továbbítják, így a PA és a PB sínpárokra a görgőknél ható F_1 és F_2 erők megegyeznek a tömegek súlyerejével (lásd a 3.12. ábrát), azaz $F_1 = F_2 = mg$.



3.12. ábra. Erők felbontása

Mivel a PA és a PB sínpár a P pont körül szabadon el tud fordulni, az egyensúly szükséges feltétele, hogy a P pontra (pontosabban a P ponton átmenő, az ábra síkjára merőleges tengelyre) nézve a forgatónyomatékok összege nulla legyen.

A forgatónyomatékok kiszámításánál figyelembe kell venni, hogy az erőnek csak a PA, illetve a PB sínre merőleges komponensének van forgató hatása, tehát meg kell határozni F_{1m} és F_{2m} erő nagyságát. Az F_{1m} erőkomponens merőleges az AP szakaszra, így $F_{1m} = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$, hasonlóan

$F_{2m} = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Az erők nagyságán kívül az erőkarokat is meg kell adni, azaz a 3.12. ábrán k_1 és k_2 jelölésű AP, illetve BP szakaszok hosszát. Az AQP háromszögben $k_1 = \dfrac{2}{\sin\alpha}$, illetve a BPR háromszögben $k_2 = \dfrac{3}{\cos\alpha}$. Egyensúlyban az erők forgató hatásai kiegyenlítik egymást, és mivel F_{1m} és F_{2m} ellentétes irányba forgatnak, ezért az $F_{1m}k_1 = F_{2m}k_2$ feltételnek kell teljesülnie. Ebbe az F_i, k_i értékeket behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{mg}{\sin\alpha}\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}\frac{3}{\cos\alpha},$$

ami rendezés után a $3\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$ alakot ölti. Ez ekvivalens a (3.13) összefüggéssel, melyet az eredeti tankönyvi matematikafeladat megoldása során deriválás után kaptunk. Ezzel tehát egy fizikai interpretáció segítségével is megoldottuk a tankönyvben kitűzött feladatot.

3.4. Módszertani kitekintés

3.4.1. Kerettantervi illeszkedés

Fizika. A fejezetben előforduló fogalmak: rugó, rugó energiája, merev test egyensúlyának feltételei, vektorok felbontása; elektromos tér, térerősség, elektromos potenciál, töltött szigetelő elektromos tere, ponttöltés és annak egyensúlya; mechanikai potenciális energia (helyzeti energia).

A fizika B kerettantervben a rugó, illetve annak húzóerővel arányos megnyúlása 7–8. évfolyamon elvárt ismeret, a rugalmas energiát, azaz a rugó energiáját a 9–10. évfolyam Energia című tematikus egységében vezetik be. Bár ekkor még nincs kimondva, hogy merev test egyensúlyát vizsgáljuk, az a feltétel, hogy a forgatónyomatékok összege nulla legyen, már a 7–8. évfolyamon a forgatónyomaték fogalmának bevezetésekor előkerül, sőt a diákok számolnak is az egyensúlyi feltételből hiányzó adatokat. Részletesebben a mechanika témakör ismétlésekor, a 9–10. évfolyamon fordul elő újra az erők egyensúlya és a forgatónyomaték, amikor matematikából már szerepelt a vektorok felbontása és a szögfüggvények is. Ezáltal már lehetőség van eredő erőket és forgástengelyre nem merőleges erőket is vizsgálni az egyensúly szempontjából.

Fizikából az A kerettanterv 9–10. évfolyamának kulcsfogalmai között szintén megtalálható a rugalmas energia és helyzeti energia. A forgatónyomaték, testek egyensúlya ebben a felépítésben először csak a 9–10. évfolyamon szerepel, bár a vektorok felbontása az A változat szerint tanuló diákoktól is elvárás.

A 3.2. szakaszban előforduló fizikai fogalmak egy része csak egyetemi tananyag, még emelt szinten sem kell töltött szigetelő elektromos terét ismerni, maga az elektromos potenciál is csak a feszültséghez kapcsolódva kerül(het) elő. Az elektromos tér fogalmát mindkét kerettanterv a 9–10. évfolyamon tárgyalja, de míg a B kerettanterv tartalmazza az elektromos tér munkáját, a feszültséget és a hozzá kapcsolódó számolásokat, addig az A változat csak a jelenségek megismerésére, mindennapokban való előfordulására fókuszál.

A fejezet 3.3. szakaszában bemutatott feladat fizikai hátteréből csak a potenciális (helyzeti) energia fogalma olyan, ami a dolgozat korábbi fejezeteiben még nem fordult elő, ez a kerettantervekben a 9–10. évfolyamon a Munka, energia című témakörön belül kerül elő a kerettantervek célkitűzéseinek megfelelően: az A változat a szemléletre helyezi a hangsúlyt, a B változat pedig részletesebben tárgyalja az összefüggéseket és a kapcsolódó számolásos feladatokat.

Matematika. A fejezetben előforduló fogalmak: lineáris regresszió (egyenesillesztés), vektorok felbontása szögfüggvények segítségével, háromszög súlypontja és annak tulajdonságai, differenciálszámítás alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában, többváltozós függvény szélsőértéke.

Statisztika (és valószínűségszámítás) már a 7–8. évfolyamon előkerül, majd a 9–10. és végül a 11–12. évfolyamon tér vissza folyamatosan bővítve a témához kapcsolódó fogalmakat, feladatokat. A lineáris regresszió, egyenesillesztés nem szerepel a középszintű matematika kerettantervben, de mindhárom évfolyamon elvárás az adatok, diagramok, grafikonok értelmezési képessége. Szemléletesen ehhez köthető az a kérdés, hogy milyen tendenciát mutatnak az adatok, a tanuló a megadott információk alapján próbáljon becsülni. Ez nyilvánvalóan egyszerű behelyettesítési feladattá válik, ha ismert az adatokra illeszthető görbe (egyenes) egyenlete. Az átlagos négyzetes eltérés az emelt matematika A és B kerettantervben is a 11–12. évfolyamon fordul elő, ami tulajdonképp az egyenesillesztés közelítési hibája, a (3.1) kifejezés, amelyet minimalizálni szeretnénk. A kerettantervben a szórás kiszámítása 9–10. évfolyamos ismeretek közt szerepel, erre lehet akkor is építeni, ha a (3.1) kifejezésre a négyzetes eltérés fogalmát nem is vezetjük be, mert szemléletesen világos, hogy a szórásnak kicsinek kell lennie ahhoz, hogy az adatok az egyenesre jobban illeszkedjenek.

A fejezet 3.2. szakaszában a legfontosabb matematikai fogalom egy tetszőleges ABC háromszög S súlypontja, illetve annak az a speciális tulajdonsága, hogy az SAB, SBC, illetve az SCA háromszögek egyenlő területűek. Maga a súlypont fogalma a középszintű matematika kerettantervben először a 7–8. évfolyamon a Geometria című témakörben szerepel. Tantárgyi kapcsolatként a kerettanterv a fizikára utal, ahol az egyensúly témakörében a forgatónyomaték tárgyalásakor szükséges a súlypont fogalma, melyet a B fizika kerettanterv mentén tanuló diákok addigra már ismernek.

Az egyváltozós függvény szélsőértéke, deriválása emelt szintű tananyag matematikából, mindkét emelt óraszámú matematika kerettanterveben és az emelt érettségi témakörei közt is szerepel. A többváltozós függvények, annak szélsőértékei és ehhez kapcsolódva a parciális deriválás viszont már mind az egyetemi analízis tárgyak témakörébe tartozik.

3.4.2. Tankönyvi kapcsolódások

Fizika. A Mozaik Kiadó Fizika tankönyvcsaládja a B fizika kerettantervhez igazodik. A rugó, rugós erőmérő már a 7. osztályos [8] tankönyvben szerepel az erő fogalmához, méréséhez kapcsolódóan. Ekkor még csak a megnyúlás és az erő közti egyenes arányosság a lényeg, hiszen ezzel lehet mérni. Hooke-törvénye csak a 9. osztályos [17] tankönyvben van leírva. A tömeg és az erő című fejezetben, majd a Munka, energia című fejezetben tárgyalja a könyv a rugalmas energia $E = \frac{1}{2}Dl^2$ képletét. A 7–8. évfolyamon szemléletre, arányosságra alapuló mechanika témakör a 9. évfolyamon ismét előkerül, de már sokkal részletesebb tárgyalásban. Ebben a tankönyvsorozatban a 9. osztályos tankönyv már vektorokkal és szummás jelöléssel is dolgozik. Precízen kimondja a merev test egyensúlyának feltételét, amelyet az egyenesillesztéses feladatnál a (3.7) és a (3.8) összefüggések felírásakor alkalmaztunk. Mivel 10. osztályban az általános matematika kerettanterv szerint is tanulnak már szögfüggvényeket hegyesszögű háromszögben, illetve szerepel a vektorok felbontása, így tanterv szerint nem okozhat gondot az erők felbontása és az egyensúly felírása szögfüggvények alkalmazásával. Gyakorlatban ez általában nincs így. Mind a szögfüggvények, mind a vektorok felbontása gondot szokott okozni a tanulóknak (különösen úgy, hogy matematikából tanultakat kell fizikában alkalmazni, ami teljesen másik tárgy, és sajnos sok diák fejében a tantárgyak élesen elkülönülő „dobozok”, ezért nagyon nehezen alkalmaznak másik órán tanult ismereteket). A szinusz-koszinusz keveredése még egyetemen is előfordul.

A fizika B kerettantervhez illeszkedően az OFI által kiadott fizika tankönyvcsalád tematikája nagyon hasonló a Mozaik Kiadó fizika tankönyvsorozatához. A rugó, rugalmas erő fogalma már a 7. osztályban előkerül a [34] tankönyvben, Hooke törvénye és a rugalmas energia azonban csak a 9. osztályos tananyagban szerepel a [11] tankönyvben. Először az erőtörvény, majd a Munka, energia, teljesítmény című fejezetben a rugalmas energia képlete is megjelenik a hozzá kapcsolódó számolásos feladatokkal együtt.

Az Újgenerációs fizika tankönyvcsalád az A fizika kerettantervhez illeszkedik, de a rugó és a rugós erőmérő ebben is szerepel a [15] tankönyvben. A rugalmas energia fogalmát először a rugó megnyújtásakor végzett munkával vezeti be 9. osztályban az [1] tankönyv.

A 3.2. szakaszban előforduló fogalmak mind az elektromosságtan témakörébe tartoznak, azon belül pedig az elektrosztatikához, ami a 10. osztályos [20] tankönyvben szerepel. A könyv bevezeti az elektromos mező fogalmát, jellemzését erővonalakkal és erre építve a feszültséget mint az elektromos tér munkáját. Megjelenik az elektromos potenciál is, de csak vezetőkön értelmezve, és csillagos, azaz emelt szintű fogalomként. Látható, hogy az ide kapcsolódó ismeretek inkább egyetemi szintű részletek a fizikából.

Ehhez hasonlóan a B kerettantervhez az OFI által kiadott [14] fizika tankönyv 10. osztályban vezeti be az elektromos mezőt, az elektromos erővonalakat és feszültséget, de ebben sem szerepel töltött szigetelők elektromos tere és nem számol elektromos potenciált sem.

A fejezet 3.3. szakaszában előforduló egyensúlyi feltételekről már írtunk, ami új fogalom, a mechanikai potenciális energia, más néven helyzeti energia. A helyzeti energia szintén a 9. osztályos [17] tankönyv Energia, munka című fejezetében található, ahol valójában a konzervatív erőtérben felírható általános potenciál fogalmára építve mutat konkrét példákat először a mágneses, majd elektromos mező esetéből, és ennek analógiájára vezeti be a gravitációs térben a helyzeti (potenciális) energiát. Ami az eddigiekből is látszott, hogy ennek az energiának az elnevezése nem egységes, azt a könyv megjegyzésként említi: lehet helyzeti energia, magassági energia, potenciális energia, gravitációs kölcsönhatási energia, konfigurációs energia, stb. Szintén a 9. évfolyamon tárgyalja a B fizika kerettantervhez igazodó [11] tankönyv a helyzeti energiát a Munka, energia, teljesítmény című fejezetében. A helyzeti energiát az emelési munkával vezeti be, majd ezután mondja ki a mechanikai energia megmaradására vonatkozó törvényt.

A fizika A kerettantervhez illeszkedő Újgenerációs [1] fizika tankönyv szintén az emelési munkához kapcsolódóan tárgyalja a helyzeti energiát: a felemelt a testnek helyzetéből adódóan munkavégző képessége van, mert például leesve más testekkel ütközhet, rajtuk munkát végezhet.

Matematika. Az OFI által kiadott Újgenerációs tankönyvcsalád a középszintű matematika kerettantervhez igazodik. A háromszög súlypontjához kapcsolódik a 12. osztályos [4] tankönyv 76. leckéje, melyben koordináta-geometriai számítások találhatóak. A 194. oldal 2. feladatának többféle megoldása során előkerül a súlypont súlyvonalat harmadoló tulajdonsága is. A súlyvonal definíciója 9. osztályos tananyag, ahogy arra a 10. osztályos könyv 59. leckéjében utal a súlypont fogalmának definiálásakor. A 49. oldal 2. és 3. házi feladata kapcsolódik ahhoz, hogy a súlyvonalak hogyan osztják fel a háromszög területét. Először egyetlen súlyvonalról kell megmutatni, hogy felezi a területet, majd következik a nehezebb rész, amikor két súlyvonalat is be kell húzni a háromszögbe. A tankönyv ábrával segíti a feladatmegoldást, melyen külön jelölve van, hogy a súlyvonal az oldal felezőpontját köti össze a szemközti csúccsal.

A 3.1.2. alszakaszban és a 3.3. szakaszban is szükség volt vektorok felbontására, ezt az Újgenerációs matematika tankönyv 10. osztályosoknak szóló [2] kötete az 50. és 51. leckében tárgyalja. A bevezető motivációs feladat a fizikához köthető, a parttal 30°-os szöget bezárva vízen halad egy hajó, amelynek mozgását a partról szeretnénk felvenni. A feladat megoldásához a hajó sebességvektorát kell felbontani parttal párhuzamos és arra merőleges összetevőkre. Ebben a feladatban nem kerül elő, de gyakori példa a sebességvektor felbontására, amikor egy állandó sebességű folyón mindig a partra merőlegesen evezünk és azt kell meghatározni, hogy hol fogunk kikötni a túlsó parton. Matematikai szempontból tökéletes példa, fizikából annyi kiegészítés szükséges hozzá, hogy hallgatólagosan felhasználjuk a felbontáskor a mozgások függetlenségének elvét, azaz hogy a csónak partra merőleges mozgása független a folyó folyási sebességétől. Ha a vektorkomponensek hosszát is kérdezik, akkor általában nem kerülhetjük el a szögfüggvények használatát. Ez szintén 10. osztályos tananyag, amit a [2] tankönyv a Vektorok és hasonlóság című fejezete után tárgyal.

A Sokszínű matematika tankönyvcsalád 10. osztályosoknak szóló [22] tankönyve előbb vezeti be a szögfüggvényeket a Geometria című fejezetében, majd ennek végén tanítja a vektorokat.

A lineáris regresszió, egyenesillesztés sem a Sokszínű matematika, sem az Újgenrációs matematika tankönycsaládban nem szerepel. Ugyanakkor az adatsokaság értelmezése, jellemzése mindkét könyv statisztikához kapcsolódó fejezeteiben megtalálható. Az Újgenerációs [4] tankönyv 12. osztályban vezeti be először az átlagtól való abszolút eltérést, majd az átlagtól való négyzetes eltérést, azaz szórásnégyzetet. Ez nagyban hasonlít a (3.1) összefüggésre, csak el van osztva az adatok számával. Az Újgenerációs tankönyv sajátosságai a számológép- és számítógép-használatot igénylő feladatok, a statisztika fejezetében is nagyon sok olyan példa található, mely digitális segédeszközt igényel. Természetesen itt is vannak segítő részek, a 40/A lecke csak arra van szánva, hogy a statisztikai üzemmódot elmagyarázza a számológépeken. Ez érthető is, hiszen manapság az adatelemzést, egyenesillesztést, valamint statisztikai mutatók kiszámítását legtöbbször számítógépes programokkal végezzük el.

A 3.3. feladat matematikai megoldása a Sokszínű Matematika tankönyvcsalád Az analízis elemei című [13] tankönyvéből származik, ahol az alapelv a deriválás alkalmazása. Mivel a deriválás emelt szintű tananyag, a középszintű matematika kerettantervhez készült Újgenereációs tankönyvben nem található meg. A Hajdu Sándor által szerkesztett 12. osztályosoknak írt [16] tankönyv emelt anyagként vezeti be a deriválást és később ennek alkalmazását szélsőérték-feladatok megoldásában.

Irodalomjegyzék

(A felsoroltakban szereplő elektronikus anyagok utolsó megtekintési ideje 2020. február 22.)

[1] dr. Ádám Péter, dr. Egri Sándor, Elblinger Ferenc, Horányi Gábor, Simon Péter: Fizika 9, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2018.
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-505040901_1__teljes.pdf

[2] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna: Matematika 10, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2018.
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-503011001_1__teljes.pdf
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-503011002_1__teljes.pdf

[3] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 11, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2018.
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-503011101_1__teljes.pdf

[4] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 12, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2018.
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-503011201_1__teljes.pdf

[5] Besenyei Ádám: Picard's weighty proof of Chebyshev's theorem, *Math. Mag.*, **91** (2018), 366–371. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0025570X.2018.1512814

[6] Besenyei Ádám: Tömegek és összegek, KöMaL Ankét előadás, 2019.
http://abesenyei.web.elte.hu/publications/tomegkozeppont.pdf

[7] Besenyei Ádám: A Milne-egyenlőtlenség és társai, avagy ellenállások álruhában, *KöMaL*, 2015/december, 514–524. és 2016/január, 2–10.
http://abesenyei.web.elte.hu/publications/ellenallas.pdf

[8] Bonifert Domonkosné Dr., Halász Tibor Dr., Kövesdi Katalin Dr., Miskolczi Józsefné Dr., Molnár György Sándorné dr., Sós Katalin: Fizika 7, Mozaik Kiadó, Szeged, 2014.

[9] Bonifert Domonkosné dr., dr. Halász Tibor, dr. Kövesdi Katalin, dr. Miskolczi Józsefné, Molnár Györgyné dr, Sós Katalin: Fizika 8, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009.

[10] J. L. Brenner: Analytic Inequalities with Applications to Special Functions, *J. Math. Anal. Appl.* **106**, (1985) 427–442

[11] Csajági Sándor, Fülöp Ferenc: Fizika a 9. évfolyam számára, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2019.

[12] Csordás Mihály, Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János Dr., Vincze István: Sokszínű Matematika, Tankönyv 11. évfolyam, Mozaik Kiadó, Szeged, 2007.

[13] Csordás Mihály, Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János Dr., Vincze István: Sokszínű Matematika, Tankönyv, Az analízis elemei 11–12., Mozaik Kiadó, Szeged, 2012.

[14] Dégen Csaba, Póda László, Urbán János: Fizika a 10. évfolyam számára, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2014.

[15] Dégen Csaba, Kartaly István, Sztanó Péterné, Urbán János: Fizika 7, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2017.
`https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-505040701_1__teljes.pdf`

[16] Hajdu Sándor Zoltán, Czeglédy István, Kovács András: Matematika 12., Műszaki Könyvkiadó, 2011.

[17] dr. Halász Tibor: Fizika 9, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[18] Holics László (szerk.): Fizika, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2009.

[19] Hraskó András: Tömegközéppont és nyomatékok a geometriában, Matematika módszertani példatár, ELTE, 2013., 532–555. oldal
`https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0064_74_modszertani_peldatar/adatok.html`

[20] dr. Jurisits József, dr. Szűcs József: Fizika 10, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[21] Katz Sándor: A megoldási ötlet egy másik témakörből érkezik,
`http://www.bomateka.hu/pseg-matek/index.htm`

[22] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János Dr., Vincze István: Sokszínű Matematika, Tankönyv 10. évfolyam, Mozaik Kiadó, Szeged, 2012.

[23] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok archívuma,
`https://www.komal.hu/lap/archivum.h.shtml`

[24] Mark Levi: The Mathemathical Mechanic, Princeton University Press, New Jersey, 2009.

[25] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Valós analízis I., Typotex, Budapest, 2012.

[26] Légrádi Imre: A hídkapcsolás eredő ellenállása és áramerősségei, *KöMaL*, 2016/február, 105–110.

[27] Nick Lord: Evaluating $\sum_1^n r^2$ and $\sum_1^n r(r+1)$ using moments, *Math. Gaz.*, **97** (2013), 504–505.

[28] Pintér Lajos: Analízis I., Speciális matematika tankönyvek, Typotex, Budapest, 1998.
http://interkonyv.hu/konyvek/Analízis_1

[29] Sikolya Eszter: Analízis, ELTE jegyzet, 2017.
http://sikolyaesz.web.elte.hu/oktatas/Sikolya_Analizis_jegyzet

[30] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete (a kezdetektől a huszadik század végéig), Akadémiai Kiadó, Budapest, 2011.

[31] Tóthné Szalontay Anna (szerk.): Fizika 8, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2017.
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-505040801_1__teljes.pdf

[32] David Treeby: A Moment's Thought: Centers of Mass and Combinatorial Identities, *Math. Mag.*, **90** (2017), 19–25.

[33] J. C. Turner – V. Conway: Problem 68-1, *SIAM Review*, **11** (1969), 402–406.

[34] Zátonyi Sándor: Fizika a 7. évfolyam számára, Eszterházy Károly Egyetem Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2015.

[35] Zátonyi Sándor: Fizika a 8. évfolyam számára, Eszterházy Károly Egyetem, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2016.

[36] G. Woeginger: When Cauchy and Hölder Met Minkowski: A Tour through Well-Known Inequalities, *Math. Mag.*, **82** (2009), 202-207.
http://www.jstor.org/stable/27765902

[37] Nemzeti Alaptanterv, 2013.
https://ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf

[38] Kerettantervek a gimnázium 9–12. évfolyamai számára (középszintű matematika, emelt szintű matematika A, emelt matematika B; fizika A, fizika B, emelt fizika),
https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html

[39] Kerettantervek az általános iskola 5–8. évfolyamai számára (középszintű matematika, emelt szintű matematika A, emelt matematika B; fizika A, fizika B, emelt fizika),
https://kerettanterv.oh.gov.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html