Nemlokális függést tartalmazó nemlineáris rendszerek

A doktori értekezés tézisei

Besenyei Ádám

Témavezető:

Simon László

egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia doktora

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Doktori Iskola

A doktori iskola vezetője:

Laczkovich Miklós

egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Alkalmazott Matematika Doktori Program

Programvezető:

Michaletzky György

egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia doktora

Az értekezés az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Alkalmazott Analízis Tanszékén készült.

Budapest

2008

1. Bevezetés

A következőkben egy rövid áttekintést adunk a szerző doktori értekezéséről. A hangsúlyt a motivációra helyezzük, az eredményeket csak vázoljuk. A pontos és szabatos tárgyalást illetően lásd az értekezést és annak irodalomjegyzékében szereplő műveket.

Az értekezésben nemlokális függést tartalmazó differenciálegyenletek, más szóval funkcionál-differenciálegyenletek rendszereivel foglalkozunk. Nemlokális függésen azt értjük, hogy az egyenlet nemcsak az ismeretlen függvények adott pontbeli értékeitől függhetnek, hanem a többi pontbeli értékeitől is, amelyek megjelenhetnek például egy késleltetés, vagy valamilyen függvény (pl. tartományon vett integrál) formájában stb. Például populációdinamikai diffúziós folyamatokban egy populáció növekedési rátája függhet a populáció méretétől, azaz a sűrűségének integráljától (lásd [10, 11]). Nemlokális egyenletek előfordulhatnak még például klimatológiai (lásd [13]), illetve folyadékáramlási modellekben, speciálisan porózus közegbeli áramlási modellekben (lásd [12, 16]). Egyéb alkalmazásokat illetően (pl. nemlokális peremfeltételek) lásd az értekezés irodalomjegyzékét. Megjegyezzük, hogy a nemlokális egyenletek tanulmányozása mellett a rugalmasságtanban előforduló nemlokális variációs egyenlőtlenségek vizsgálata is fontos és érdekes téma (lásd [4, 14]).

Az értekezésben két nemlokális rendszert vizsgálunk. Az egyik csupa parabolikus egyenletből áll, a másik három különböző típusú egyenletet tartalmaz: egy közönséges, egy parabolikus és egy elliptikus differenciálegyenletet. Ez utóbbi egy porózus közegbeli áramlási modell általánosításaként fogható fel.

Vizsgálataink fő eszköze a monoton típusú operátorok elmélete, ennek részletes tárgyalását illetően lásd a [8, 15, 20] monográfiákat. Ezenkívül a [7, 9] cikkek pszeudomonoton operátorokkal kapcsolatos eredményeire is támaszkodunk.

Mindkét rendszer esetében igazoljuk gyenge megoldás létezést véges és végtelen időintervallumon, továbbá megvizsgáljuk a megoldások néhány tulajdonságát: a korlátosságot és a $t \to \infty$ esetén való stabilizációt (azaz egy stacionárius állapothoz való konvergenciát). Tételeinket az értekezésben konkrét példákkal illusztráljuk.

Funkcionál-differenciálegyenletekkel kapcsolatban érdemes megemlíteni a [17, 19] monográfiákat, amelyek további példákat tartalmaznak, és a témát egy másik megközelítésben (operátor-félcsoportok segítségével) tárgyalja.

2. Jelölések

A továbbiakban $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mindig egy korlátos tartományt jelöl, amelynek pereme sima, valamint $0 < T < \infty$ valós szám és röviden $Q_T := (0,T)\times\Omega$, $Q_\infty := (0,\infty)\times\Omega$. A szokásos Szoboljev-tereket $W^{1,p}(\Omega)$ és $W_0^{1,p}(\Omega)$ jelöli, továbbá $L^p(0,T;V)$ azon $u\colon (0,T) \to V$

mérhető függvények tere, amelyekre $\|u\|_{L^p(0,T;V)} := \left(\int_0^T \|u\|_V^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ $(1 < p < \infty)$. Ismert, hogy $(L^p(0,T;V))^* = L^q(0,T;V^*)$, ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ezenkívül $L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$ azon $u\colon (0,\infty) \to V$ mérhető függvények tere, amelyekre $u|_{(0,T)} \in L^p(0,T;V)$ minden $0 < T < \infty$ esetén. A $(W^{1,p}(\Omega))^*$-beli, illetve $L^q(0,T;V^*)$-beli funkcionálok esetében rendre a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $[\cdot,\cdot]$ jelöléseket használjuk. Végül D_i, D_t jelöli az x_i, illetve t változó szerinti (disztribúciós értelemben vett) parciális deriválás operátorát és röviden $D = (D_1, \ldots, D_n)$.

3. Parabolikus egyenletekből álló rendszer

Tekintsük az alábbi (leegyszerűsített) nemlokális parabolikus differenciálegyenletet:

$$D_t u(t,x) - \operatorname{div}\left(g\Big(\int_\Omega u(t,x)\,dx\Big) Du(t,x)\right) = f(t,x) \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

ahol $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ adott függvények, $u\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az ismeretlen és adott $u(0,x) = \varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti érték. Ilyen típusú problémák például (hőterjedési vagy populációdinamikai) diffúziós folyamatokban fordulhatnak elő. A fentihez hasonló alakú nemlokális kvázilineáris egyenletekkel foglalkozik [10, 11], ahol a szerzők megoldás létezését és aszimptotikus tulajdonságait igazolták. Általános divergencia alakú parabolikus kvázilineáris egyenleteket vizsgált a monoton operátorok elméletének segítségével [18], ahol a szerző gyenge megoldás létezését és kvalitatív tulajdonságait igazolta. Az értekezés első felében ez utóbbi cikk eredményeit terjesztjük ki nemlokális parabolikus egyenletekből álló rendszerekre (lásd [1]).

Tekintsük a következő, N darab nemlokális parabolikus egyenletből álló rendszert:

$$\begin{aligned} D_t u^{(l)}(\cdot) - \sum_{i=1}^n D_i\left[a_i^{(l)}(\cdot, u^{(1)}(\cdot), \ldots, u^{(N)}(\cdot), Du^{(1)}(\cdot), \ldots, Du^{(N)}(\cdot); u^{(1)}, \ldots, u^{(N)})\right] \\ + a_0^{(l)}(\cdot, u^{(1)}(\cdot), \ldots, u^{(N)}(\cdot), Du^{(1)}(\cdot), \ldots, Du^{(N)}(\cdot); u^{(1)}, \ldots, u^{(N)}) = f^{(l)}(\cdot) \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $(\cdot)$ a $(t,x) \in Q_T$ változót jelöli, továbbá a pontosvessző után álló tagok jelképezik a nemlokális változókat $(l = 1, \ldots, N)$. Az egyszerűség kedvéért a rendszerhez tartozó kezdeti feltételt válasszuk homogénnek, a peremfeltétel pedig legyen homogén Dirichlet- vagy Neumann-típusú.

Legyen $p \geq 2$ (konjugált kitevője q), továbbá V-t válasszuk $(W^{1,p}(\Omega))^N$ egy zárt lineáris alterének (a peremfeltételnek megfelelően: homogén Neumann esetén $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$), homogén Dirichlet esetén pedig $V = (W_0^{1,p}(\Omega))^N$). A megoldások tere $X := L^p(0,T;V)$. Egy $v \in X$ függvény koordinátái $(v^{(1)}, \ldots, v^{(N)})$, továbbá egy $\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ vektor koordinátái (ζ_0, ζ), ahol $\zeta_0 = (\zeta_0^{(1)}, \ldots, \zeta_0^{(N)}) \in \mathbb{R}^N$, $\zeta = (\zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_1^{(N)}, \ldots, \zeta_n^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(N)}) \in \mathbb{R}^{nN}$ (az alsó index jelzi a deriválás változóját, a felső pedig az aktuális koordinátafüggvényt).

Az $a_i^{(l)}$ függvényekre néhány feltételt szabunk, amelyek biztosítani fogják gyenge megoldás létezését $(0,T)$-ben. Tegyük fel $i = 0, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, N$ esetén a következőket:

(A1) Minden fix $v \in X$ esetén az $a_i^{(l)}: Q_T \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \times X \to \mathbb{R}$ függvény Carathéodory típusú, azaz mérhető (t,x)-ben minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ esetén és folytonos (ζ_0, ζ)-ban m.m. $(t,x) \in Q_T$ esetén.

(A2) Léteznek $g_1: X \to \mathbb{R}^+$, $k_1: X \to L^q(Q_T)$ korlátos operátorok úgy, hogy m.m. $(t,x) \in Q_T$ és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$, $v \in X$ esetén érvényes a $|a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)| \leq g_1(v)\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + [k_1(v)](t,x)$ becslés.

(A3) Majdnem minden $(t,x) \in Q_T$ és minden $\zeta \neq \tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{nN}$, $\zeta_0 \in \mathbb{R}^N$, $v \in X$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v) - a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\tilde{\zeta};v) \right) (\zeta_i^{(l)} - \tilde{\zeta}_i^{(l)}) > 0.$$

(A4) Léteznek $g_2: X \to \mathbb{R}^+$, $k_2: X \to L^1(Q_T)$ operátorok, amelyekre m.m. $(t,x) \in Q_T$ és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$, $v \in X$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)\zeta_i^{(l)} \geq g_2(v)\left(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p\right) - [k_2(v)](t,x).$$

Továbbá teljesül, hogy $\lim_{\|v\|_X \to \infty} \left(g_2(v)\|v\|_X^{p-1} - \|k_2(v)\|_{L^1(Q_T)}\|v\|_X^{-1} \right) = +\infty$.

(A5) Ha $u_k \to u$ gyengén X-ben és erősen $L^p(0,T;(L^p(\Omega))^N)$-ben, akkor

$$\lim_{k\to\infty} \|a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u_k) - a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u)\|_{L^q(Q_T)} = 0.$$

Az (A1)–(A4) feltételek a klasszikus eset (vagyis amikor nincs nemlokális változó, lásd [9, 15, 20]) feltevéseinek általánosításai, (A2)–(A4) növekedési, monotonitási és koercitivitási feltételek, ezenkívül (A5) nemlokális változóbeli „folytonosságot" fejez ki.

Definiáljuk az $A: X \to X^*$ operátort úgy, hogy $u, v \in X$ esetén

$$[A(u), v] := \sum_{l=1}^{N} \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(u, Du; u) D_i v^{(l)} + a_0^{(l)}(u, Du; u) v^{(l)} \right).$$

Ezenkívül legyen $L: D(L) \to X^*$, $Lu = D_t u$ a differenciálás operátora X-en, értelmezési tartománya $D(L) := \{u \in X : D_t u \in X^*,\ u(0) = 0\}$. Végül legyen $F \in L^q(0,T;V^*)$. A fenti operátorok segítségével az (2) rendszer gyenge alakja $(0,T)$-ben a következő:

$$Lu + A(u) = F. \tag{3}$$

A pszeudomonoton operátorok elméletének (lásd [7]) felhasználásával adódik

3.1 Tétel. *Tegyük fel, hogy az (A1)–(A5) feltételek teljesülnek. Ekkor $A: X \to X^*$ korlátos, demifolytonos, koercitív és pszeudomonoton $D(L)$-re nézve. Következésképpen minden $F \in X^*$ esetén a (3) problémának van $u \in X$ megoldása.*

Az ún. Volterra-féle tulajdonság segítségével egyszerűen belátható gyenge megoldás létezése a $(0,\infty)$ intervallumon. A megoldások tere $X^\infty := L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$ és tegyük fel,hogy

(Vol) Az $a_i^{(l)}\colon Q_\infty \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times X^\infty \to \mathbb{R}$ $(i = 0,\dots,n;\ l = 1,\dots,N)$ függvények $(0,T)$ intervallumra való $a_i^{(l)}(t,x,\xi,\zeta_0,\zeta,\eta_0,\eta;v)|_{(0,T)}$ leszűkítései csak a v függvény $(0,T)$-re való leszűkítésétől függnek minden $0 < T < \infty$ esetén.

A fenti feltétel azt fejezi ki, hogy a nemlokális függés nem terjed ki a függvény jövőbeli értékeire. Ekkor az „átlós eljárás" alkalmazásával kapjuk:

3.2 Tétel. *Tegyük fel, hogy (Vol) fennáll, és az (A1)–(A5) feltevések teljesülnek a $(0,\infty)$-en (azaz minden $0 < T < \infty$-re az $a_i^{(l)}$ függvények $(0,T)$-re való leszűkítései teljesítik ezeket). Ekkor létezik $u \in X^\infty$ gyenge megoldása a (2) rendszernek a $(0,\infty)$ intervallumon, abban az értelemben, hogy minden $0 < T < \infty$ esetén $u|_{(0,T)}$ megoldása a (3) problémának.*

Egy további koercitivitási feltevéssel igazolható a $(0,\infty)$-beli megoldások korlátossága.

(A4*) Létezik $g_2 \in \mathbb{R}^+$ konstans és $k_2\colon X^\infty \to L^1_{\mathrm{loc}}(Q_\infty)$ Volterra típusú operátor, amelyekre m.m. $(t,x) \in Q_\infty$ és minden $(\zeta_0,\zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$, $v \in X^\infty$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)\zeta_i^{(l)} \geq g_2\left(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p\right) - [k_2(v)](t,x).$$

Ezenkívül léteznek $c_4 > 0$, $0 \leq p_1 < p$ konstansok valamint egy $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$ függvény úgy, hogy $\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau) = 0$, továbbá $v \in X^\infty$, $D_t v \in L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$ esetén m.m. $t > 0$-re

$$\int_\Omega |[k_2(v)](t,x)|\,dx \leq c_4\left(\sup_{\tau\in[0,t]}\|v(\tau)\|^{p_1}_{(L^2(\Omega))^N} + \varphi(t)\cdot\sup_{\tau\in[0,t]}\|v(\tau)\|^{p}_{(L^2(\Omega))^N} + 1\right).$$

3.3 Tétel. *Tegyük fel, hogy fennáll (Vol), és az (A1)–(A5), (A4*) feltételek teljesülnek a $(0,\infty)$-en (hasonló értelemben, mint a 3.2 Tétel esetében), továbbá $F \in L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$. Ekkor a (2) rendszer minden $(0,\infty)$-beli u gyenge megoldására $u \in L^\infty(0,\infty;(L^2(\Omega))^N)$.*

Néhány további feltevés mellett a megoldások $t \to \infty$ esetén való stabilizációja, azaz egy stacionárius állapothoz való konvergencia is belátható.

(A2+) Létezik $c_v > 0$ konstans és $k_v \in L^q(\Omega)$ függvény úgy, hogy $|a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)| \leq c_v\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + k_v(x)$ m.m. $x \in \Omega$ és minden $(\zeta_0,\zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$, $v \in X^\infty \cap L^\infty(0,\infty;(L^2(\Omega))^N)$ esetén $(i = 0,\dots,n;\ l = 1,\dots,N)$.

(A6) Léteznek $a_{i,\infty}^{(l)}\colon \Omega \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \to \mathbb{R}$ Carathéodory- tulajdonságú függvények, amelyekre $\lim_{t\to\infty} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v) = a_{i,\infty}^{(l)}(x,\zeta_0,\zeta)$ m.m. $x \in \Omega$ és minden $(\zeta_0,\zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$, $v \in X^\infty \cap L^\infty(0,\infty;(L^2(\Omega))^N)$ esetén $(i = 0,\dots,n;\ l = 1,\dots,N)$.

(A7) Létezik $c_5 > 0$ konstans úgy, hogy m.m. $x \in \Omega$ és minden $(\zeta_0, \zeta), (\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$, $v \in X^\infty$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \left(a_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v) - a_i^{(l)}(t, x, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}; v) \right) (\zeta_i^{(l)} - \tilde{\zeta}_i^{(l)})$$
$$\geq c_5 \left(|\zeta_0 - \tilde{\zeta}_0|^p + |\zeta - \tilde{\zeta}|^p \right) - k_3(t, x, \zeta_0, \tilde{\eta}_0; v),$$

ahol $\lim_{t\to\infty} \int_\Omega k_3(t, x, u(t,x), \tilde{u}(t,x); v)\, dx = 0$ ha $u, \tilde{u}, v \in L^\infty(0, \infty; (L^2(\Omega))^N)$.

Megjegyezzük, hogy (A6) az $a_i^{(l)}$ függvények stabilizációját jelenti, továbbá (A7) egyenletes monotonitást fejez ki, amely az egyértelmű stacionárius megoldás létezését biztosítja.

Értelmezzük az $A_\infty : V \to V^*$ operátort úgy, hogy v, $w \in V$ esetén

$$\langle A_\infty(v), w \rangle := \sum_{l=1}^{N} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,\infty}^{(l)}(v, Dv) D_i w^{(l)} + a_{0,\infty}^{(l)}(v, Dv) w^{(l)} \right).$$

3.4 Tétel. *Tegyük fel, hogy (Vol) fennáll, és az (A1)–(A7) feltételek teljesülnek a* $(0, \infty)$*-en (hasonló értelemben, mint az 3.2 Tétel esetében), valamint létezik* $F_\infty \in V^*$*, amelyre* $\lim_{t\to\infty} \|F(t) - F_\infty\|_{V^*} = 0$*. Ekkor egyértelműen létezik* $u_\infty \in V$*, amelyre* $A_\infty(u_\infty) = F_\infty$*, továbbá* $\lim_{t\to\infty} \|u(t) - u_\infty\|_{(L^2(\Omega))^N} = 0$ *az* (2) *rendszer minden* $(0, \infty)$*-beli megoldására.*

Az (A6) feltételben szereplő konvergenciára konkrét polinomiális becslést megadva a fenti tételbeli konvergencia sebességére egy polinomiális becslést nyerhetünk. Az előbbi tételek feltételeit kielégítő függvényeket illetően lásd az [1, 5] cikkeket.

Megjegyezzük, hogy a (2) rendszert kissé módosítva értelmezhető periodikus megoldás fogalma (minthogy ez (2) esetében nem teljesen világos) és könnyen be is látható létezése.

4. Három különböző típusú egyenletből álló rendszer

Az értekezés második felében egy olyan rendszert vizsgálunk, amely három különböző típusú egyenletből áll: egy közönséges, egy parabolikus és egy elliptikus egyenletből. Ilyen típusú rendszer például egy porózus közegbeli áramlási modellként fordulhat elő. Egy porózus közeg lyukacsos szerkezetű, mint például a mészkő, a benne lévő folyadék áramlását a lyukak nagy összfelülete határozza meg. A folyadékban előfordulhatnak kémiai anyagok, amelyek az áramlás során megváltoztatják a lyukak szerkezetét. Ezt a folyamatot vizsgálta [16], amelyben a következő egydimenziós modellt állították fel a szerzők:

$$\omega(\cdot) D_t u(\cdot) = D_x \alpha(|v(\cdot)| u_x(\cdot)) + K(\omega(\cdot)) D_x p(\cdot) u_x(\cdot) - k u(\cdot) g(\omega(\cdot)) \tag{4}$$

$$D_t \omega(\cdot) = b u(\cdot) g(\omega(\cdot)) \tag{5}$$

$$D_x(K(\omega(\cdot)) D_x p(\cdot)) = b u(\cdot) g(\omega(\cdot)), \tag{6}$$

$$v(\cdot) = -K(\omega(\cdot)) D_x p(\cdot) \tag{7}$$

a $(0,\infty)\times(0,1)$-en a következő mellékfeltételekkel: $u(0,x) = u_0(x)$, $\omega(0,x) = \omega_0(x)$ ($x \in (0,1)$), $u(t,0) = u_1(t)$, $D_x u(t,1) = 0$ ($t > 0$) és $p(t,0) = 1$, $p(t,1) = 0$ ($t > 0$) ahol ω a porozitás (a lyukak „aránya"), u a folyadékban lévő kémiai anyag koncentrációja, p a nyomás, v a sebesség, továbbá α, k, b adott konstansok, K és g adott függvények. Vegyük észre, hogy a (7) egyenletet a többi egyenletbe helyettesítve a rendszer valójában három egyenletből áll. Megfelelő változók rögzítésével három különböző típusú egyenletről van szó: fix u esetén (5) egy közönséges differenciálegyenlet ω-ra nézve, fix ω és p esetén (4) egy parabolikus egyenlet u-ban, végül fix ω és u esetén (7) egy elliptikus egyenlet. A fenti rendszer tehát egy hibrid evolúciós-elliptikus probléma. Hasonló modellt vizsgált [12] a Rothe-módszer segítségével.

Az értekezésben a fenti rendszernek a következő általánosítását tanulmányozzuk a monoton operátorok elméletének segítségével (lásd [2, 3, 6]):

$$D_t\omega(t,x) = f(t,x,\omega(t,x),u(t,x);u), \qquad \omega(0,x) = \omega_0(x), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &D_t u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} D_i\left[a_i(t,x,\omega(t,x),u(t,x),Du(t,x),\mathbf{p}(t,x),D\mathbf{p}(t,x);\omega,u,\mathbf{p})\right] \\ &\quad + a_0(t,x,\omega(t,x),u(t,x),Du(t,x),\mathbf{p}(t,x),D\mathbf{p}(t,x);\omega,u,\mathbf{p}) = g(t,x), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} D_i[b_i(t,x,\omega(t,x),u(t,x),\mathbf{p}(t,x),D\mathbf{p}(t,x);\omega,u,\mathbf{p})] \\ &\quad + b_0(t,x,\omega(t,x),u(t,x),\mathbf{p}(t,x),D\mathbf{p}(t,x);\omega,u,\mathbf{p}) = h(t,x) \end{aligned} \tag{10}$$

az (egyszerűség kedvéért) $\omega(0,x) = \omega_0(x)$, $u(0,x) = 0$ kezdeti feltétellel és homogén Dirichlet- vagy Neumann-típusú peremfeltétellel (a pontosvessző utáni tagok a nemlokális változókat jelölik, a $\mathbf{p}$ változó a kitevőktől való megkülönböztetés érdekében félkövér). A fenti rendszerrel kapcsolatban a monoton operátorok elméletének segítségével belátható gyenge megoldás létezése és igazolható a megoldások néhány kvalitatív tulajdonsága. A vizsgálódások ötlete kettős: a gyenge megoldások terének megválasztása, illetve a szukcesszív approximáció módszerének alkalmazása a bizonyításokban. Röviden vázoljuk a rendszerrel kapcsolatos eredményeinket.

Legyen $2 \le p_1, p_2 < \infty$, továbbá V_i a $W^{1,p_i}(\Omega)$ egy zárt lineáris altere (a peremfeltételnek megfelelően) és $X_i = L^{p_i}(0,T;V_i)$ ($i = 1,2$), ez utóbbi rendre az u és $\mathbf{p}$ megoldások tere. Az eredeti fizikai jelentésnek megfelelően ω-t az $L^\infty(Q_T)$ térben keressük. A 3. szakasszal analóg feltételeket szabunk:

(A) a_i függvények: Carathéodory, növekedés, „monotonitás", koercitivitás, „folytonosság" a nemlokális változóban (feltételek a p_1 kitevővel);

(B) b_i függvények: Carathéodory, növekedés, „egyenletes monotonitás", koercitivitás, „folytonosság" a nemlokális változóban (feltételek a p_2 kitevővel);

(F) f függvény: Carathéodory, Lipschitz, „folytonosság” a nemlokális változóban, „előjel” feltétel (vonzó egyensúlyi helyzet).

Legyenek $A\colon L^\infty(Q_T)\times X_1\times X_2\to X_1^*$, $B\colon L^\infty(Q_T)\times X_1\times X_2\to X_2^*$, amelyekre

$$[A(\omega,u,\mathbf{p}),v_1]=\int_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^n a_i(\omega,u,Du,\mathbf{p},D\mathbf{p};\omega,u,\mathbf{p})D_iv_1+a_0(\omega,u,Du,\mathbf{p},D\mathbf{p};\omega,u,\mathbf{p})v_1\right),$$

$$[B(\omega,u,\mathbf{p}),v_2]=\int_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^n b_i(\omega,u,\mathbf{p},D\mathbf{p};\omega,u,\mathbf{p})D_iv_2+b_0(\omega,u,\mathbf{p},D\mathbf{p};\omega,u,\mathbf{p})v_2\right).$$

Ezenkívül $L:D(L)\to X_1^*$, $Lu=D_tu$ a deriválás operátora X_1-en, értelmezési tartománya $D(L)=\{u\in X_1\colon D_tu\in X_1^*,\ u(0)=0\}$. Végül legyen $G\in X_1^*$, $H\in X_2^*$. Ekkor a (8)–(10) rendszer gyenge alakja a $(0,T)$ intervallumon:

$$\omega(t,x)=\omega_0(x)+\int_0^t f(s,x,\omega(s,x),u(s,x);u)\,ds \quad \text{m.m. } Q_T\text{-ben} \tag{11}$$

$$Lu+A(\omega,u,\mathbf{p})=G \tag{12}$$

$$B(\omega,u,\mathbf{p})=H. \tag{13}$$

4.1 Tétel. *Tegyük fel, hogy fennáll (A), (B), (F) (lásd [2, 6]). Ekkor minden $\omega_0\in L^\infty(\Omega)$, $G\in X_1^*$ és $H\in X_2^*$ esetén létezik $\omega\in L^\infty(Q_T)$, $u\in D(L)$, $\mathbf{p}\in X_2$ megoldása a (11)–(13) problémának (amelyet a (8)–(10) rendszer $(0,T)$-beli gyenge megoldásának nevezünk).*

A bizonyítás fő ötlete, hogy definiáljuk az (ω_k), (u_k), $(\mathbf{p}_k)$ szukcesszíve approximáló sorozatokat: ω_k-t a (11) egyenletből kapjuk az u_{k-1} előző közelítés segítségével; u_k a (12) egyenletből adódik az $\omega_{k-1},\mathbf{p}_{k-1}$ előző közelítések segítségével; $\mathbf{p}_k$ a (13) egyenletből adódik ω_{k-1},u_{k-1} felhasználásával.

A Volterra-tulajdonság segítségével nem nehéz belátni gyenge megoldás létezését a $(0,\infty)$ intervallumon (lásd [3, 6]). Legyen $X_i^\infty:=L^{p_i}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V_i)$ $(i=1,2)$ a megoldások tere.

4.2 Tétel. *Tegyük fel, hogy az a_i,b_i,f függvények Volterra-tulajdonságúak, továbbá a 4.1 Tétel feltételei teljesülnek minden $0<T<\infty$-re. Ekkor minden $G\in L^{q_1}_{\mathrm{loc}}(0,\infty,V^*)$, $H\in L^{q_2}_{\mathrm{loc}}(0,\infty,V_2^*)$ esetén létezik $\omega\in L^\infty(Q_\infty),u\in X_1^\infty,\mathbf{p}\in X_2^\infty$ úgy, hogy minden $0<T<\infty$-re a $(0,T)$-re való megszorításuk megoldása a (11)–(13) rendszernek.*

További koercitivitási feltételeket szabva (a 3. szakaszbeli (A4*)-gal analóg módon) igazolható a megoldások korlátossága (lásd [3, 6]).

4.3 Tétel. *Tegyük fel, hogy a 4.2 Tétel feltételei teljesülnek néhány további koercitivitási feltétellel kiegészítve (lásd [3, 6]) és legyen $G\in L^\infty(0,\infty;V_1^*)$, $H\in L^\infty(0,\infty;V_2^*)$. Ekkor $\omega\in L^\infty(Q_\infty)$, $u\in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$, $\mathbf{p}\in L^\infty(0,\infty;V_2)$ a (8)–(10) rendszer minden, $(0,\infty)$-beli $\omega,u,\mathbf{p}$ gyenge megoldására.*

A $p_1 = p_2 = p$, $X_1^\infty = X_2^\infty = X^\infty$ speciális esetben belátható a megoldások $t \to \infty$ esetén való stabilizációja. Feltételezve az a_i, b_i, f függvények stabilizációját ((A6) feltétellel analóg módon) definiálhatók az $A_\infty, B_\infty \colon L^\infty(\Omega) \times V \times V \to V^*$ operátorok:

$$\langle A_\infty(\omega, u, \mathbf{p}), v\rangle := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_{i,\infty}(\omega, u, Du, \mathbf{p}, D\mathbf{p}) D_i v + a_{0,\infty}(\omega, u, Du, \mathbf{p}, D\mathbf{p}) v \right),$$

$$\langle B_\infty(\omega, u, \mathbf{p}), v\rangle := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_{i,\infty}(\omega, u, \mathbf{p}, D\mathbf{p}) D_i v + b_{0,\infty}(\omega, u, \mathbf{p}, D\mathbf{p}) v \right).$$

Néhány további feltételt szabva („egyenletes monotonitás" (A7)-tel analóg módon, illetve a (11) egyenlet egyensúlyi helyzetének exponenciális stabilitása) belátható (lásd [3, 6])

4.4 Tétel. *Tegyük fel, hogy a 4.3 Tétel feltételei teljesülnek kiegészítve néhány egyéb feltétellel (lásd [3, 6]), továbbá* $\lim_{t\to\infty} \|G(t) - G_\infty\|_{V^*} = 0$, $\lim_{t\to\infty} \|H(t) - H_\infty\|_{V^*} = 0$ *valamilyen* $G_\infty, H_\infty \in V^*$*-ra. Ekkor egyértelműen létezik* $u_\infty, \mathbf{p}_\infty \in V$ *úgy, hogy* $A_\infty(\omega^*, u_\infty, \mathbf{p}_\infty) = G_\infty$, $B_\infty(\omega^*, u_\infty, \mathbf{p}_\infty) = H_\infty$, *ahol* $\omega^* \in L^\infty(\Omega)$ *a* (11) *egyensúlyi pontja. Ezenkívül a* (8)–(10) *rendszer minden* $\omega, u, \mathbf{p}$ $(0,\infty)$*-beli megoldására* $t \to \infty$ *esetén* $\omega(t,\cdot) \to \omega^*$ $L^\infty(\Omega)$*-ban,* $u(t) \to u_\infty$ $L^2(\Omega)$*-ban,* $\int_{t-1}^{t+1} \|u(s) - u_\infty\|_V^p \, ds \to 0$, $\int_{t-1}^{t+1} \|\mathbf{p}(s) - \mathbf{p}_\infty\|_V^p \, ds \to 0$.

A 3. szakaszhoz hasonlóan a fenti tételben szereplő konvergenciára polinomiális becslés nyerhető. Példákat illetően lásd [2, 3, 5, 6].

Hivatkozások

[1] Á. Besenyei, On systems of parabolic functional differential equations, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **47** (2004), 143–160.

[2] Á. Besenyei, Existence of weak solutions of a nonlinear system modelling fluid flow in porous media, *Electron. J. Diff. Eqns.*, Vol. 2006(2006), No. 153, pp. 1–19.

[3] Á. Besenyei, Stabilization of solutions to a nonlinear system modelling fluid flow in porous media, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **49** (2006), 115–136.

[4] Á. Besenyei, On nonlinear parabolic variational inequalities containing nonlocal terms, *Acta Math. Hung.*, **116**(1–2) (2007), 145–162.

[5] Á. Besenyei, Examples for uniformly monotone operators arising in weak forms of elliptic problems, kézirat, 2007.

[6] Á. Besenyei, On a nonlinear system containing nonlocal terms related to a fluid flow model, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 8'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 3. (2008), pp. 1–13.

[7] J. Berkovits, V. Mustonen, Topological degree for perturbations of linear maximal monotone mappings and applications to a class of parabolic problems, *Rend. Mat. Ser. VII* **12**, Roma (1992), 597–621.

[8] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groups de contraction dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[9] F. E. Browder, Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **74** (1977), 2659–2661.

[10] M. Chipot, B. Lovat, Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems, advances in quenching, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal*, **8** (2001), 35–51.

[11] M. Chipot, L. Molinet, Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems, *Appl. Anal.*, **80**(3–4) (2001), 279–315.

[12] S. Cinca, Diffusion und Transport in porösen Medien bei veränderlichen Porosität, Diplomawork, Univ. Heidelberg, 2000.

[13] J. I. Díaz, G. Hetzer, A quasilinear functional reaction-diffusion equation arising in climatology, in: Equations aux Dérivée Partielles et Apllications, Gauthier-Villars, Paris, 1998, 461–480.

[14] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics & Physics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Series, Vol. 219., 1976.

[15] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[16] J. D. Logan, M. R. Petersen, T. S. Shores, Numerical study of reaction-mineralogy-porosity changes in porous media, *Appl. Math. Comput.*, **127** (2002), 149–164.

[17] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.

[18] L. Simon, On parabolic functional differential equations of general divergence form, *Proceedings of the Conference FSDONA 04*, Milovy, 2004, 280–291.

[19] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer, 1996

[20] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A and II/B (Linear and Nonlinear Monotone Operators)*, Springer, 1990.