

# A gyorsajtástól az időjárásig – kalandok az alkalmazott matematikában

Besenyei Ádám, Csomós Petra

Az élet szinte minden területén időben és térben lezajló jelenségek vesznek körül minket: szüntelenül dobog a szívünk, mozognak a járművek, az időjárás folyton változik, a bankszámlánk egyenlege vagy a tőzsdeárfolyamok folyamatosan ingadoznak, az erőművek éjjel-nappal termelik a villamos energiát, a hírek futótűzként terjednek a világhálón, és a sort a végtelenségig folytathatnánk. E folyamatok mind szerves részei a hétköznapijainknak, és rendszerint teljesen természetesnek vesszük, hogy az ember képes befolyásolni, szabályozni vagy legalábbis előrejelezni az alakulásukat. Hogy ez valóban így van, abban számos tudomány, köztük a matematika is alapvető szerepet játszik. A matematika nyelvén a valóságot némiképp leegyszerűsítő, ám mégis hűen tükröző modelleket állíthatunk fel, amelyek a számítógépek hatékony közreműködésével segítenek a különféle folyamatok megértésében. A modellezés egyik fő eszköze a változás sebességének, ütemének fogalma, amely egy gyorsajtó autós példáján találóan szemléltethető. Írásunkban e csattanós történetből kiindulva könnyed, játékos modelleken keresztül az egyre összetettebb alkalmazások felé haladunk, és egészen az időjárás-előrejelzés problémájáig kalauzoljuk az olvasót. Utunk során bepillantást nyerünk az időben és térben változó jelenségek modellezésének szépségeibe és kihívásaiba.

## 1. Tanmese a sebességről

A következő tréfás kis történetet a kiváló fizikus és tudomány népszerűsítő Richard Feynman (1918–1988) előszeretettel mesélte előadásában a sebesség fogalmának bevezetésekor (lásd a Leighton és Sands szerzőtársakkal írt [2] tankönyvének 102. oldalát).

A rendőr megállít egy gyorsan ajtó autót, és kérdőre vonja.

- Kérem, Ön óránként 90 km sebességgel ajtott.
- Ez lehetetlen, hiszen én csak 7 perce indultam el. Nevetséges! Hogyan tudtam volna megtenni 90 km-t egy óra alatt, mikor még nem is megyek egy órája?!

A 90 km/h sebesség megméréséhez természetesen nincs szükség arra, hogy 1 órán keresztül állandó iramban, megállás nélkül autózzunk. Hiszen a

90 km/h sebesség azt is jelenti, hogy ezzel fél óra alatt 45 km utat teszünk meg, avagy negyed óra alatt 22,5 km-t, vagy 7 perc, azaz kb. 0,11667 óra alatt kb.  $0,11667 \cdot 90$  (azaz kb. 10 és fél) km-t, vagy 10 másodperc, azaz kb.  $0,00278$  óra alatt kb.  $0,00278 \cdot 90$  km-t (azaz kb. 250 métert), és ezt így folytathatjuk tovább egészen a másodperc tört részeig.

A traffipax (más néven közúti sebességmérő műszer) a kibocsájtott, majd a gépkocsiról visszaverődő (és szabad szemmel nem látható) lézersugarak segítségével éppen azt méri meg, hogy mekkora volt a gépkocsi elmozdulása egy igen-igen rövid időtartam alatt, amelyből az eltelt idővel való osztás után adódik a jármű sebessége. Ez valójában csupán átlagos sebesség, ám mivel az emberi reakcióidőhöz képest elenyésző század másodpercek alatt a sofőr már se nem fékezik, se nem gyorsít, ezért a mozgás egyenletesnek tekinthető, így a traffipax által jelzett érték joggal nevezhető a gépjármű *pillanatnyi sebességének* a szóban forgó rövid időtartam bármely pillanatában.

## 2. Matematikai traffipax

A traffipax tehát a gépkocsi helyzetének pillanatnyi változási ütemét méri: az elmozdulás arányítva az eltelt igen rövid időtartam hosszához. Minél nagyobb a változás üteme, annál hosszabb utat tett meg az autó az adott idő alatt, vagyis – szemléletünkkel összhangban – annál gyorsan haladt. Ha a változás üteme 0, akkor az autó egy helyben állt. Bár negatív sebességet a traffipax nem mutat, a negatív változási ütemnek mégis van jelentése: ez a traffipaxtól való távolodást fejezi ki. Minél nagyobb e negatív szám abszolút értéke, annál gyorsabban távolodik az autó. Ekkor a negatív előjelet az autóra rápillantva érzékeljük, nem pedig a mérőműszeren.

Az iménti gondolatokat tetszőleges mennyiségre átültethetjük anélkül, hogy lézersugarakra lenne szükségünk. Vizsgálhatjuk többek között a forró tea hőmérsékletének, az olvadó hógolyó térfogatának vagy éppen a bankszámlán kamatozó pénzünknek a változási ütemét. Ha  $x(t)$  jelöli az adott mennyiség értékét a  $t$  időpillanatban, akkor a változási üteme a mennyiség *nagyon kicsi  $\Delta t$  idő alatti* megváltozásának aránya az eltelt  $\Delta t$  időhöz:

$$x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Szabatos matematikai megfogalmazásban valójában a hányadosnak az úgynevezett határértékét kellene képezni, midőn az időtartam hossza 0-hoz közelít; ezt a határértéket szokás differenciálhányadosnak hívni és  $x'(t)$ -vel jelölni. Sokszor azonban csupán véges számú mérési adat áll rendelkezésünkre, ezért a határérték helyett a gyakorlatban a fenti közelítő képletet használjuk (feltéve, hogy  $\Delta t$  valóban kicsi!).

Az autó sebességénél megszokott szemléletünk érvényben marad: ha a változás üteme pozitív szám, akkor a mennyiség nő, minél nagyobb ez a szám,

annál gyorsabban. Amennyiben a változás üteme negatív, akkor a mennyiség csökken, 0 változási ütem esetén pedig a mennyiség állandó. Például Las Vegas-i kaszinózás közben kifejezetten örömteli, ha pénzünk 100 dollár/perc ütemben változik, a mínusz 200 dollár/perc viszont igencsak nyugtalanító.

A változás üteme a kiindulópontja a matematika differenciálszámítás nevű ágának, amely a 17. században Isaac Newton (1643–1727) és Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1717) munkássága nyomán, többek között a mechanika alaptörvényeinek matematikai formába öntése kapcsán bontakozott ki. A változás ütemére ma leginkább használatos  $x'(t)$  jelölést és a *derivált* elnevezést az 1700-as évek végén Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) francia matematikus vezette be. A deriváltról tehát leginkább egy *matematikai traffipax* juthat eszünkbe, amely bármely pillanatban megadja egy adott mennyiség változási ütemét. Ez az időben és térben zajló folyamatok modellezésének nélkülözhetetlen eszköze.

### 3. A Sosemvolt Bank

Első példánkban képzeljük el, hogy a Sosemvolt Bank egy különleges ajánlattal próbálja csábítani az ügyfeleket: a megszokott éves kamatozás helyett folytonos kamatozást biztosítanak a náluk elhelyezett pénzeszközöknek, ami azt jelenti, hogy a bankszámlán lévő összeg garantált változási üteme arányos magával az összeggel. Ha  $p(t)$  jelöli a bankszámla egyenlegét a  $t$  időpillanatban és az arányossági tényező pedig  $r$ , akkor matematikailag:

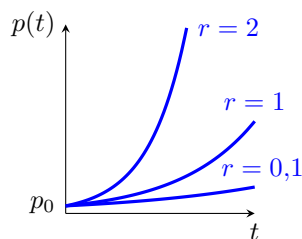
$$p'(t) = r \cdot p(t).$$

Ez egy *differenciálegyenlet*, amelyben a  $p(t)$  mennyiség az ismeretlen. Az egyenlet önmagában nem elegendő a pénzünk alakulásának meghatározásához, szükséges az induló összeg ismerete is, ezt *kezdeti értéknek* hívjuk. Az 1. ábrán egy adott kezdeti értékből induló, három különböző  $r$  tényezőhöz tartozó megoldás grafikonja látható: pénzünk exponenciálisan gyarapodik.

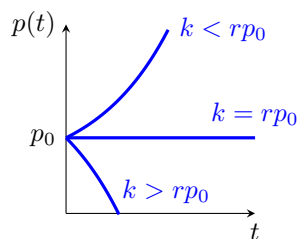
A modell apró finomításához vegyük figyelembe, hogy mindennapi megélhetésünkre időegységenként  $k$  forintot veszünk ki a számláról, azaz pénzköltésünk sebessége  $k$ . Költsérről lévén szó, ez negatív előjellel jelenik meg pénzünk változási ütemében:

$$p'(t) = r \cdot p(t) - k.$$

Már ebből is a valóságot jól tükröző következtetések vezethetők le vagyunk alakulásáról. Nevezetesen, adott  $p_0$  kezdő tőkével a tönkremenés csupán attól függ, hogy a  $k$  pénzköltési sebesség hogyan viszonyul az  $rp_0$  kifejezéshez: ha  $k$  ennél nagyobb, akkor idővel a számlán lévő összes pénzünk elfogy; ha kisebb, vagyis nem költünk túl sokat, akkor pénzünk folyamatosan gyarapszik. A  $k = rp_0$  esetben a kamatozás és pénzköltés egyensúlyban van, az egyenlegünk változatlan az idők során. Mindezt a 2. ábrán látható grafikonok szemléltetik.



1. ábra. Pénzünk időbeli alakulása  $p_0$  kezdő tőkéből indulva a változás ütemét befolyásoló  $r$  arányossági tényező három különböző értéke mellett.



2. ábra. Pénzünk időbeli alakulásának háromféle esete az  $r$  arányossági tényező, a  $k$  pénzköltési sebesség és a  $p_0$  kezdő tőke viszonyának tükrében.

A kamatozás mellett népességszámok növekedése, radioaktív anyagok bomlása és a forró tea kihűlése szintén leírható az előbbiekhöz hasonló egyenletekkel. Nézzünk most egy olyan modellt, amely már két egyenletből áll.

## 4. A királylány és a lovagok

Deriv Állam királyának egyetlen lánya, Dacos Dalma fura viselkedésű: minél inkább szereti valaki őt, annál kevésbé szereti ő az illetőt; és minél kevésbé szereti valaki őt, ő annál inkább szereti az illetőt. A király szeretné férjhez adni a lányát, Dalmának azonban egyszerre több lovag is udvarol:

Normál Norman, aki teljesen szokványosan viselkedik;  
 Furi Feri, aki Dalmához hasonlóan eléggé fura figura;  
 Kedély Kenéz, aki szokványos, de hangulatai kissé befolyásolják;  
 Kedély Kende, aki szokványos, de hangulatai erősen hatnak rá.

A király tüstént hívatta udvari matematikusát, Deriv Álmost, hogy segítsen a tökéletes lovag kiválasztásában. Vajon kihez érdemes feleségül adnia lányát?

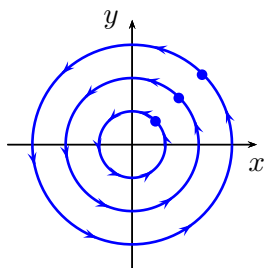
A Dalma és udvarlója közti érzelmi viszonyra felállítandó modellünkben két mennyiség fog szerepelni: Dalma érzéseinek mértéke az adott lovag iránt a találkozásukat követő  $t$  időpillanatban, ezt  $x(t)$  fogja jelölni, valamint a lovag érzéseinek mértéke Dalma iránt, ezt  $y(t)$  jelöli majd. Ha tehát  $x(t) > 0$ , akkor a  $t$  időpontban Dalma szereti a lovagot, és minél nagyobb  $x(t)$ , annál inkább; ha viszont  $x(t) < 0$ , akkor Dalma ellenszenvvel viszonyul a lovaghoz – az  $y(t)$  mennyiség jelentése hasonló Dalma felé. Ekkor Dalma fura viselkedése modellezhető oly módon, hogy az érzelmeinek változási üteme (azaz  $x'(t)$ ) a másik fél érzéseivel ( $y(t)$ -vel) ellentétes. Egy szokványos viselkedésű személyre pedig gondolhatunk úgy, mint akinek érzései a másik fél érzelmeivel összhangban változnak. Ezenfelül a hangulatfüggőség jelentse azt, hogy az adott lovag érzelmeire a saját érzései is hatnak: ha szereti Dalmát, akkor

ettől az érzései még erőteljesebbé válnak, ám ha Dalma ellenszenves számára, akkor ez az elutasítás lesz egyre nagyobb fokú. Két differenciálegyenletből álló egyszerű szerelmi modellünk ennek megfelelően így fest:

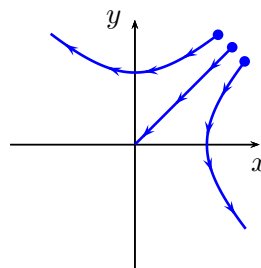
$$\begin{aligned}x'(t) &= -y(t), \\y'(t) &= ax(t) + by(t).\end{aligned}$$

Itt  $a$  és  $b$  olyan számokat jelölnek, amelyek értékeit az egyes jelöltek viselkedése határozza meg. Vegyük például rögtön Normál Normant, akit a saját érzelmei nem befolyásolnak, ezért  $a = 0$ , másrészt Norman érzései Dalma érzéseivel összhangban változnak, így modellünkben  $b$  értékét 1-nek választjuk. Feltételezhetjük továbbá, hogy Dalma és Norman a találkozásukkor egymásba szeretnek. Ennek konkrét mértékét megadva a megoldások már adódnak, ám képletek felírása helyett célszerűbb koordinátarendszerben ábrázolni az  $(x(t), y(t))$  pontok alkotta görbét, mert ez éppen Dalma és Norman szerelmének fejlődéstörténete. Most ezek a 3. ábrán látható körvonalak – a kezdőpontokat kiterjedt pontok, az irányt nyilak jelzik. Egy ilyen görbe kezdetben a jobb felső síknegyedben halad, ahol  $x(t)$  és  $y(t)$  is pozitív, tehát a fiatalok kölcsönösen szeretik egymás. Később a görbe a bal felső síknegyedbe fordul át, ekkor a lovag még szereti Dalmát, de Dalma már ellenszenvvel viszonyul felé. Ezután olyan időszak következik, amikor egyszerre ellenszenvesek egymásnak. Szerencsére érkezik a „tavasz”: Dalma ismét kedvelni kezdi a lovagot, végül mindketten újra szeretik egymást, és kezdődik minden előről. Kapcsolatuk olyan, mint az évszakok folyamatosan ismétlődő váltakozása.

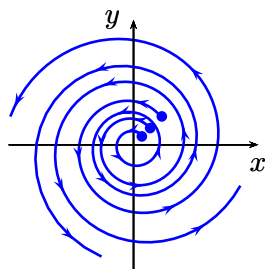
Nézzük most Fura Feri lovagot. Az ő viselkedése Dalmáéhoz hasonló, ezért azt az  $a = -1$  és  $b = 0$  paraméterekkel modellezhetjük. Kiindulva



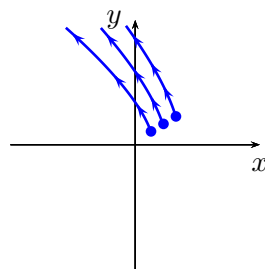
3. ábra. Dalma és Norman érzelmeinek folyamatosan ismétlődő váltakozását leíró körvonalak. A görbék pontjainak koordinátái a felek egymás iránti érzéseinek felelnek meg. A találkozás pillanatát kiterjedt pont, a haladás irányát pedig nyilak jelölik.



4. ábra. Dalma és Feri kapcsolatát leíró görbék három különböző kezdőpont esetén. Az origóba futó görbe a teljes közömbösség felé haladásnak, a másik két görbe pedig hosszú távon a két fél közötti egyre erőteljesebb imádat-utálat ellentétnek felel meg.



5. ábra. Dalma és Kenéz kapcsolatát leíró spirálok. Az egymáshoz való szeretet-ellenszenv viszony ismétlődően változik, ám az érzelmeik erőssége folyamatosan nő.



6. ábra. Dalma és Kende kapcsolatát leíró görbék. Az idő múlásával Dalma egyre ellenszenvesebben viszonyul Kendéhez, aki viszont egyre jobban imádja Dalmát.

abból, hogy találkozásukkor vonzódnak egymáshoz, a 4. ábrán látható háromféle kimenetel adódik kapcsolatukra. Ezek közül az egyik a kölcsönös közömbösség, a görbe az origó felé halad. A további két esetben Dalma és a lovag ellentétesen fog egymáshoz viszonyulni: a pár egyik tagja lassacskán kiábrándul, és az idő haladtával egyre ellenszenvesebb lesz számára a másik, aki éppen ezért töretlenül, sőt egyre jobban imádni fogja párját – nem szokványos kapcsolat.

A Kedély lovagok esetében a szokványos viselkedés alapján  $a = 1$ , de őket a saját érzelmeik is befolyásolják, Kenéznél ez nem annyira jelentős, ám Kendén elhatalmasodik. Ennek modellezésére célszerű Kenéz esetében a  $b = 1$ , míg Kende esetében a  $b = 2$  paraméterérték választása. Ekkor Dalma és Kenéz viszonyát jellemző görbék az 5. ábrán látható spirálok: a kapcsolatnak négyféle állapota változik, azonban az érzelmeik mértéke folyamatosan erősödik – gyaníthatóan ez a „téli” szakaszokban nem vezet sok jóra. Dalma és Kende viszonyát a 6. ábra mutatja: Dalma fokozatosan kiábrándul Kendéből, ami Kendét egyáltalán nem zavarja, rendíthetetlenül odavan Dalmáért.

A kapcsolatok alakulása alapján most már mindenki a saját ízlése szerint dönthet, mi legyen Deriv Álmos tanácsa, és hogyan végződjön a mese...

Különféle kétszereplős kapcsolati modellek nem csupán szerelmi viszony, hanem például ellenérdekelt felek közötti háborús stratégiák vagy ragadozó és zsákmányállatok együttélésének matematikai leírására is alkalmasak (bővebben lásd Hatvani és Pintér [5], valamint Strogatz [8] könyvét). Most azonban lépünk tovább egy ezeknél még összetettebb modellre.

## 5. Matematika egy bögre kakaóban

Edward Norton Lorenz (1917–2008) amerikai meteorológus és matematikus az 1960-as évek elején az elsők között figyelt fel a fizikai jelenségeket leíró modellek egy meglepő és később sokat kutatott tulajdonságára. A tudós éppen egy egyszerű időjárás-előrejelző modell eredményeit szeretne volna részletesen megvizsgálni, ezért egy korábbi számolás közben kapott adatot kezdeti értéként felhasználva újraindította a számítógépes program futását, majd elment kávézni. Mire visszatért, a gép már ki is számította a vizsgálni kívánt adatokat, azok időbeli alakulása azonban eltért az eredetileg kapott adatsortól – eleinte csak kicsit, a végére azonban számottevően. Lorenz hamarosan rájött, hogy a különbség oka a kezdeti értékekben keresendő: a második futtatáskor kevesebb tizedes jegyet használva adta meg azokat, mint amennyivel a gép eredetileg számolt. Így tehát nem *pontosan* ugyanabból a kezdeti értékből indította el az időjárás előrejelzését, és emiatt kaphatott két, egymástól teljesen különböző eredményt. Ez az észrevétel rávilágított arra, hogy bizonyos rendszerek viselkedése érzékeny a kezdeti értékek megválasztására.

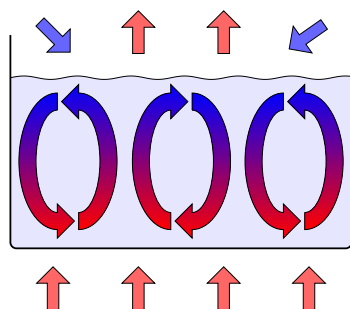
Korszakalkotó megfigyelését Lorenz a [6] dolgozatában az alulról melegített, felülről hűtött folyadékokban kialakuló áramlás (konvekció) kissé egyszerűsített modelljén szemléltette. A folyadék az alsó, melegebb rétegekből eleinte feláramlik, a hűvösebb felszín közelében lehűl, majd süllyedni kezd. Mivel közben újabb rétegek emelkednek fel, létrejön a 7. ábrán látható, cellás szerkezetű áramlási kép fel- és leszálló áramlatokkal. Ilyen típusú áramlást figyelhetünk meg például egy napsütéses napon gomolyfelhők képződésekor a légkörben vagy a reggeli kakaó melegítésekor az edényben. Előbbi esetben a gomolyfelhők, utóbbiban a kakaópor „festi” meg az áramlási cellákat (lásd a 8. ábrát).

Ha az áramlás bizonyos fizikai tulajdonságait  $x(t)$ ,  $y(t)$  és  $z(t)$  jelöli a  $t$  időpillanatban, akkor ezen mennyiségek időbeli viselkedése az alábbi, Lorenz-rendszerként is emlegetett három differenciálegyenlettel írható le, amelyben  $A$  valamilyen paraméter:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 10(y(t) - x(t)), \\y'(t) &= Ax(t) - x(t)z(t) - y(t), \\z'(t) &= x(t)y(t) - \frac{8}{3}z(t).\end{aligned}$$

Ezek az egyenletek merőben különböznek az eddigi példáinktól. Míg azokban egy mennyiség változási üteme *lineáris* kapcsolatban állt magával a mennyiséggel vagy a többi ismeretlen mennyiséggel, azaz a különféle ismeretlen mennyiségek csak egy számmal megszorozva szerepeltek az egyenletek jobb oldalán, ebben a modellben az ismeretlen mennyiségek szorzata is megjelenik. Ez az úgynevezett *nemlineáris* kapcsolat vezet a kezdeti értékektől való érzékeny függéshez.

A Lorenz-rendszer megoldása az  $A$  paraméter „kis” értékére (például  $A = 1,1$ ) megadja a 7. és a 8. ábrákon bemutatott áramlási képet. Ha



7. ábra. Alulról melegített, felülről hűtött folyadékban kialakuló, cellás szerkezetű áramlás képe. A folyadék hőmérsékletét és áramlásának irányát megfelelő színű nyilak jelzik (a piros szín a melegnek, a kék a hidegnek felel meg). Az edény alatti és feletti nyilak a melegítést és hűtést jelképezik.

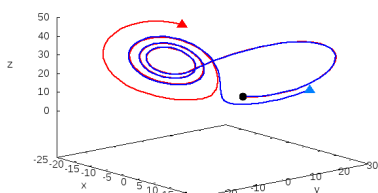


8. ábra. Melegedő kakaóban kialakuló áramlást ábrázoló fénykép, melyhez hasonló bárki saját maga is készíthet.

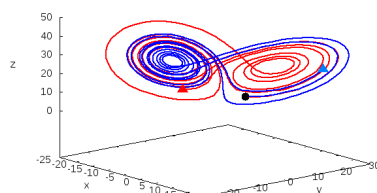
azonban például  $A = 28$  értéket választunk, a Lorenz-rendszer többé nem ezt a természeti jelenséget írja le, hanem érdekes viselkedésnek lehetünk tanúi. A 9. ábrán a Lorenz-rendszer  $(x(t), y(t), z(t))$  megoldását ábrázoltuk a háromdimenziós koordinátarendszerben két, egymástól kicsit eltérő kezdeti érték esetén. Látható, hogy a két megoldás eleinte közel halad egymáshoz, ám egy idő után feltűnően szétválnak. A megoldás időbeli lefolyása tehát érzékeny a kezdeti értékek megválasztására. A 10. ábrán ugyanezen megoldásokat hosszabb ideig ábrázoltuk (az [1] előadás fóliáin a megfelelő animáció is végigkövethető). Lorenz további vizsgálatai azt is megmutatták, hogy a megoldás sohasem ismétli önmagát, azaz nem periodikus, és meglehetősen kiszámíthatatlanul „kaotikusan” viselkedik. Ezt szemlélteti a 11. ábra, amelyen az  $x(t)$  függvény viselkedése látható.

A fenti eredmények fényében érthető, miért röppent fel a következő költői kérdés egy 1972-es konferencián: egy pillangó szárnycsapása Brazíliában kiválthat-e egy tornádót Texasban? Még ha erre nemleges is a válasz, a kérdés a földi légkör mozgásait leíró matematikai modellnek a gyakorlati életben legfontosabb tulajdonságára hívta fel a figyelmet: kis hatások idővel nagyra nőhetnek. Csakúgy, mint a Lorenz-rendszer, az időjárás előrejelzésére alkalmazott modell is nemlineáris, megoldásának vizsgálata során tehát ugyancsak megfigyelhető a fenti jelenség. A nemlineáris modellek további érdekességeiről és alkalmazási területeiről olvashatunk Gleick [4] ismeretterjesztő könyvében, valamint Tél és Gruiz [9] tankönyvében.





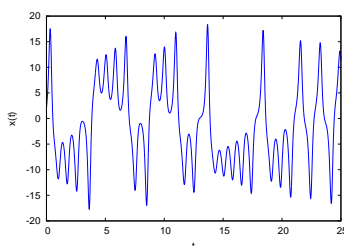
9. ábra. A Lorenz-rendszer két, egymáshoz igen közeli, egy fekete kiterjedt ponttal jelölt kezdeti értékből indított (piros és kék) megoldásának időbeli alakulása a háromdimenziós koordináta-rendszerben,  $A = 28$  érték esetén. A  $t_1 = 3,2$  időpontbeli értékeket megfelelő színű háromszögek jelölik.



10. ábra. A Lorenz-rendszer két, egymáshoz igen közeli, egy fekete kiterjedt ponttal jelölt kezdeti értékből indított (piros és kék) megoldásának időbeli alakulása a háromdimenziós koordináta-rendszerben,  $A = 28$  érték esetén. A  $t_2 = 8,3$  időpontbeli értékeket megfelelő színű háromszögek jelölik.

## 6. Előrejelezhető-e az időjárás?

Műholdképen örvénylő felhőzet vagy radarképen felvillanó villámok láttán bizonyára sokak fejében megfordult már, hogyan is lehet az időjárást, azaz a légkör alsó rétegének állapotát és bonyolult folyamatait előrejelezni. Mindezekelőtt tudnunk kell, milyen értékekre vagyunk kíváncsiak a jövőben; ezek az időjárás-előrejelző modellek ismeretlen mennyiségei. Érdemes a légkör fizikai állapothatározói közül olyanokat választani, melyeket minél pontosabban meg is tudunk mérni, és amelyek változási ütemének (deriváltjának) nagyságáról valamilyen ismerettel rendelkezünk. Ezek leginkább a hőmérséklet, a nyomás, a sűrűség, a relatív nedvesség és a szélsősebesség három irány szerinti összetevőinek értékei, melyek immáron nemcsak az időtől függenek, de attól is, hogy a légkör mely pontjában mérjük őket. Ezen mennyiségek között a fizika alaptörvényei teremtenek kapcsolatot, amelyek matematikai



11. ábra. A Lorenz-rendszerben szereplő  $x(t)$  mennyiség időbeli alakulása  $A = 28$  paraméterérték választással.

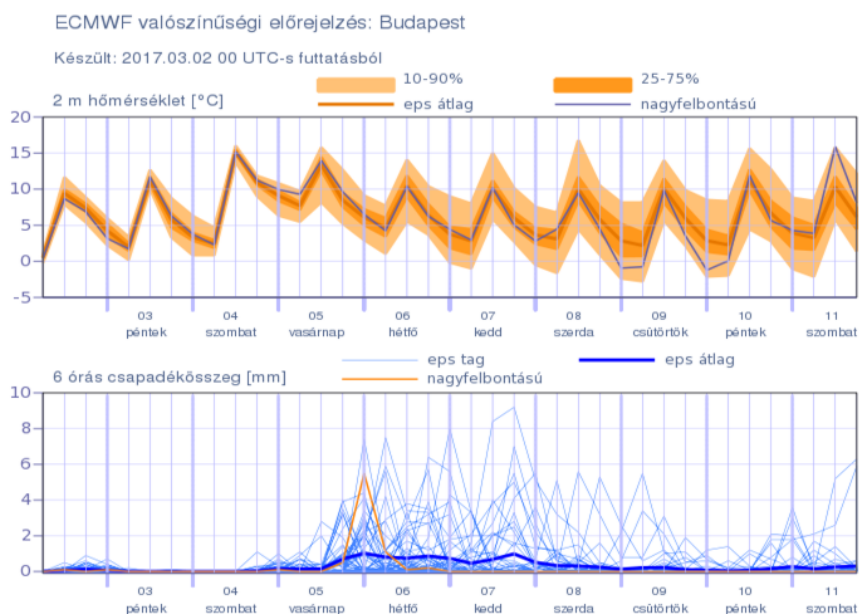
alakban felírva hét bonyolult, egymással összefüggő, nemlineáris differenciálegyenlethez vezetnek.

Mint a szintén nemlineáris Lorenz-rendszer esetében láttuk, egymástól kezdetben csak kicsit eltérő adatok egészen más eredményhez vezethetnek. Az időjárás-előrejelző modellek ezen matematikai tulajdonsága meglepő mértékben befolyásolja az emberek mindennapjait. Nem mindegy ugyanis, hogy a meteorológus meleg napsütéses időt vagy hóesést jósol-e a hétvégére. Az időjárás tehát megjósolhatatlannak tűnik. Vigyázzunk azonban, mert nem mindegy, mi okozza ezt a fajta megjósolhatatlanságot! Mint a példánkban szereplő összes differenciálegyenlet, az időjárás-előrejelző modell is determinisztikus, azaz a kezdeti értéke egyértelműen meghatározza a rendszer időbeli fejlődését. A 9. ábrán látható görbék pontjainak elhelyezkedése (az időjárás-előrejelző modellek esetében a hőmérséklet, nyomás, sűrűség, relatív nedvesség és szélesebbesség értékek) pontosan kiszámítható az egyenletek alapján. Az időjárás-előrejelzések pontatlanságát nagy részben éppen az okozza, hogy nem ismert a modell *pontos* kezdeti értéke, azaz a légkör pontos állapota. Mint ahogyan kávézás előtt Lorenz is csak pár tizedes jegy pontossággal adta meg a kezdeti adatokat a számítógépnek, a légkör aktuális állapotát – melyből a következő napokra vonatkozó előrejelzést indítjuk – mi is csak pontatlanul ismerjük. Ez a pontatlanság a mérések időbeli és térbeli ritkaságából és természetesen azok hibáiból származik. A légkör pontos állapotától vett bármilyen kicsi eltérés a kezdeti értékben bizonyos idő után jelentős eltérést okoz az előrejelzésben.

Az előrejelzés időben egyre bizonytalanabbá válása jól nyomon követhető az úgynevezett valószínűségi előrejelzések segítségével. Ezek éppen azon az elgondoláson alapulnak, hogy a légkör pontos állapotának ismerete nélkül a modellnek több „hibás” kezdeti értéket adunk meg, és a belőlük indított előrejelzések sokaságát vizsgáljuk (ezen megoldásokat az Ensemble Prediction System angol kifejezés rövidítéséből eps tagoknak is szokás nevezni). Az előrejelzések átlaga nagy eséllyel a várható időjárást adja meg, míg a szóráruk az előrejelzés bizonytalanságát számszerűsíti. Ilyen típusú diagramok az Országos Meteorológiai Szolgálat [10] honlapján is elérhetők az aktuális előrejelzések között, egy példát láthatunk a 12. ábrán. Nagyszerűen nyomon követhető a Lorenz-rendszernél megfigyelt viselkedés: a kezdetben kis eltérések az idő múlásával egyre nagyobbakká válnak – megnehezítve az előrejelző meteorológus dolgát, akinek el kell döntenie, hogy szerdán  $16^{\circ}\text{C}$  vagy  $4^{\circ}\text{C}$  lesz-e délben.

## 7. Számptalan sok számolás

Felmerülhet a kérdés, hogyan származtatható egy ilyen sok egyenletből álló, bonyolult, nemlineáris modell megoldása, azaz az időjárás előrejelzése. Az időjárás-előrejelző modellek megoldása kizárólag közelítő módszerekkel és



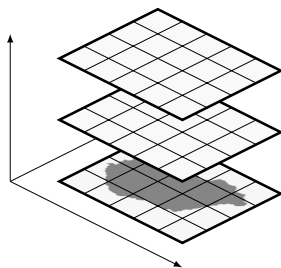
12. ábra. Hőmérsékletre és csapadékösszegre vonatkozó valószínűségi előrejelzés a [10] honlapról. Mindkét ábrán a különböző kezdeti értékből indított megoldások, ún. „eps tagok”, valamint azok átlaga látható. A sötét narancssárgával jelölt területek a nagyobb valószínűséggel, míg a világos narancssárga területek a kisebb valószínűséggel előforduló értékeket jelölik. A „nagy felbontású” görbe az időjárás-előrejelző modell egy, az eps tagoknál pontosabban számított megoldását jelöli.

számítógépek segítségével állítható elő – ráadásul a légkörnek még csak nem is minden pontjára és nem is minden időpillanatra. A mennyiségek értékeit a légkör összes pontja helyett csak egy, a 13. ábrán láthatóhoz hasonló, háromdimenziós rácsháló csúcaiban tudjuk előrejelezni, és azokat is csak bizonyos kis  $\Delta t$  időközönként. Az egyenletekben megjelenő deriváltakat az általunk matematikai traffipaxnak nevezett hányadossal közelítve felírható egy, deriváltakat már nem tartalmazó egyenletrendszer, melyből a mennyiségek  $t + \Delta t$  időpillanatbeli értékei kifejezhetők az ismert,  $t$  időpillanatbeli értékekkel. A számítógépes megoldás így lépked tehát, lépésről lépésre,  $\Delta t$  időközönként az időjárást meghatározó mennyiségek kezdeti értékétől a holnapra vonatkozó, előrejelzett értékig.

A számítógép használata valójában csak a számításokat gyorsítja meg, de mindegyik elvégezhető lenne kézzel is. Jóval a számítógépek megjelenése előtt, 1922-ben Lewis Fry Richardson (1881–1953) angol matematikus, fizikus, meteorológus valóban nekiállt papíron ceruzával meghatározni az 1910. május 20-ai, reggel 7 órás mérési adatsorból a 6 órával későbbi előrejelzést. Munkája 6 hetet vett igénybe. Richardson becslése szerint mintegy

60000 fő segítségével kellene ahhoz, hogy a másnapi időjárás előrejelzését hamarabb ki tudják számítani, mint ahogyan az a valóságban bekövetkezik. Ez volt az első, matematikai alapokon nyugvó, differenciálegyenleteket felhasználó kísérlet az időjárás számszerű előrejelzésére. A modell részletes leírását Richardson a [7] könyvében adta közre. Ugyan a tudós számításai pontosak voltak, előrejelzése mégsem adta vissza a mért adatokat, sőt, a valóságban nehezen elképzelhető méretű nyomásváltozást és túl nagy szelet jósolt. Mint a későbbi kutatások eredményeiből kiderült, ennek többek között egy matematikai oka is volt, melyre csak egy 1928-ban megjelent, óriási jelentőségű tudományos dolgozat világított rá. Richard Courant (1888–1972), Kurt Friedrichs (1901–1982) és Hans Lewy (1904–1988) német származású amerikai matematikusok megmutatták, hogy az előrejelzés csak akkor lehet a valósághoz közeli, ha a  $\Delta t$  időköz és a térbeli rácsháló csúcsainak távolsága között fennáll egy bizonyos összefüggés: a rácsháló csúcsainak adott távolsága esetén az időköz nem lehet akármilyen nagy! Ez a matematikai feltétel igencsak megnöveli az előrejelzés számítási igényét. Ennek illusztrálására vegyünk egy példát: tekintsük például a kb. 3000 km  $\times$  2500 km nagyságú Európára vonatkozó 48 órás előrejelzést. A térbeli rácsháló csúcsai között a felszínen legyen 8 km a távolság, függőlegesen vegyünk 50 szintet, és számítsuk az előrejelzést 15 perces időközönként. A modell megoldása során ekkor mintegy tízmilliárd darab számot kapunk eredményül. És a matematikai feltétel miatt nem választhatjuk nagyobbra a 15 perces időközt...

Nem meglepő tehát, hogy mindezen számolásokat számítógépek végzik. Példaként említjük meg, hogy az angliai Readingben található Európai Középtávú Időjárás-előrejelző Központ két darab Cray XC40 szuperszámítógéppel rendelkezik, melyeknek csupán egy harmadát használják számításokra, két harmada az adatok tárolására szolgál. Az előrejelzések számításában 129960 processzor-mag vesz részt, és napi 130 terabyte adat keletkezik!



13. ábra. Az időjárás-előrejelző modellekben használt háromdimenziós rácsháló szemléltetése. Az előrejelzés a differenciálegyenletek közelítő módszerekkel való megoldásának segítségével csak ezen rácsháló pontjaiban számítható. A köztes értékek ezekből ún. interpolációs eljárással származtathatók.

## 8. Kitekintés

A változás ütemére felírt egyenletek és a segítségükkel kiszámított előrejelzések az életünk szinte minden területén, a fizikai és műszaki tudományoktól kezdve a biológián és kémián át a közgazdaságtanig mindenütt megjelennek. Egy időjárás-előrejelző modellhez csatolva fontos alkalmazási területük a légszennyező anyagok, a vulkántörésekből származó hamu és por, továbbá a légköri radioaktív részecskék terjedésének előrejelzése. Áramlási modelleket használnak a tengerek, óceánok vízfelszínén megjelenő olajfoltok terjedésének előrejelzésekor is. Hasonló egyenletekkel modellezhető a betegségek, járványok terjedése. Ebben az esetben az ismeretlen mennyiségek a fertőzött, a fertőzhető és a gyógyult egyedek száma. A rádió és a mobiltelefon működéséhez is elengedhetetlen az elektromágneses hullámok terjedését modellező differenciálegyenletek megoldása. A változás üteme azonban nem csak a természettudományokban játszik nagy szerepet: a piaci és a tőzsdelyamatok is modellezhetőek segítségükkel. Külön érdekessége van a modelleknek abban az esetben, amikor az általuk leírt folyamatokat kívülről befolyásolni, szabályozni szeretnénk. Ilyen típusú egyenletek megoldásait kell kiszámítani rakéták irányításakor, űreszközök landolásakor, önvezető járművek vezérlésekor, de a pénzköltésünk és megtakarításunk egyensúlyban tartásához is. Az alkalmazások tárháza végelethetetlen, és a minket körülvevő világ folyamatosan szolgáltatja az újabb és újabb, érdekesebbnél érdekesebb problémákat, kihívásokat. Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikus és fizikus gondolatát idézve (lásd a [3] művének xiii. oldalát): „A természet elmélyült tanulmányozása a matematikai felfedezések legtermékenyebb forrása.”

## Hivatkozások

- [1] Besenyei Á. – Csomós P.: Pillangók, százszorszépek és szerelem – avagy egy alkalmazott matematikus mindennapjai, Kutatók éjszakája, 2016. <http://abesenyei.web.elte.hu/publications/pillangok.pdf>
- [2] R. P. Feynman – R. B. Leighton – M. Sands: Mai fizika 1. (A természettudomány alapjai, A mechanika törvényei), 4. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
- [3] J-B. J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, F. Didot, Paris, 1822. <https://archive.org/details/thorieanalytiq00four>
- [4] J. Gleick, Káosz (Egy tudomány születése), Gönczöl, Budapest, 2004.
- [5] Hatvani L. – Pintér L.: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában, Polygon, Szeged, 1997.
- [6] E. N. Lorenz: Deterministic nonperiodic flows, Journal of the Atmospheric Sciences Vol. 20, 130–141, 1963

- [7] L. F. Richardson: Weather Prediction by Numerical Process, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
- [8] S. H. Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos, With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering, Addison-Wesley, 1995.
- [9] Tél T. – Gruiz M.: Kaotikus dinamika (Bevezetés a kaotikus dinamika világába a klasszikus mechanika jelenségein keresztül), Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [10] <http://met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/>