A számtani-mértani közép és egyéb érdekességek

Besenyei Ádám

Matematikai tanulmányai során mindenki találkozik a számtani és a mértani közép fogalmával. A két közép között fennálló egyenlőtlenség hasznos eszköz például egyszerű szélsőérték-feladatok megoldásában. Bizonyára kevesen gondolnák, hogy a számtani és a mértani közép mellett létezik az úgynevezett számtani-mértani közép is. E dolgozat célja ennek, a magyar nyelvű matematikai szakirodalomban talán kevésbé ismert fogalomnak a rövid bemutatása. Amellett, hogy a számtani-mértani közép egy önmagában is érdekes és egyszerű „matematikai objektum”, látni fogjuk, hogy valójában mély matematikai összefüggések rejlenek mögötte. Ezen összefüggések „felfedezője” Gauss volt, eredményei fontos szerepet töltöttek be a matematika egy ágának, az elliptikus függvények elméletének kialakulásában. Természetesen az elliptikus függvények témakörének ismertetése meghaladná e dolgozat kereteit, de a hozzá kapcsolódó történeti háttérre (annak fordulatossága indokán) mindenképpen érdemes kitérnünk. A rövid matematikatörténeti áttekintés mellett dolgozatunkban szót ejtünk az általánosítás és alkalmazás kérdéseiről is, amelyek ugyancsak sok matematikai érdekességet rejtenek. Igyekszünk minden előkerülő fogalmat és állítást több oldalról is megvilágítani, elősegítve ezzel a téma könnyebb megértését. Cikkünk elméleti részében a határérték-számítás elemeire fogunk támaszkodni. Ezzel kapcsolatban a [10] tankönyvre és a [11] példatárra hívjuk fel a figyelmet, amelyekben megtalálhatók a felhasználásra kerülő fogalmak és összefüggések. A történeti háttérről az érdeklődők bővebben olvashatnak az [5] cikkben, a számtani-mértani közép részletes tárgyalását illetően pedig a [3] könyv néhány fejezetét ajánljuk.

1. Számtani, mértani, számtani-mértani közép

Először röviden elevenítsük fel a számtani és a mértani középpel kapcsolatos ismereteinket!

1. Definíció. *Adott a, b pozitív valós számok számtani (vagy aritmetikai) közepe $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$, mértani (vagy geometriai) közepe $G(a,b) = \sqrt{ab}$.*

Jól ismert, hogy bármely a, b pozitív valós számok esetén

$$G(a,b) \leqslant A(a,b), \tag{1}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$. Ennek bizonyítása kiolvasható az alábbi azonos átalakításból:

$$A(a,b) - G(a,b) = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a - 2\sqrt{ab} + b\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Érdemes megfogalmaznunk a közepek néhány nagyon egyszerű tulajdonságát. Ehhez vezessük be a következő jelölést: a, b valós számok esetén jelölje $\min(a,b)$ és $\max(a,b)$ rendre a két szám közül a kisebbet, illetve a nagyobbat.

2. Állítás. *Legyenek a, b pozitív valós számok. Ha $M(a,b)$ az a, b számok számtani közepe vagy mértani közepe, akkor a következők teljesülnek:*

(i) $\min(a,b) \leqslant M(a,b) \leqslant \max(a,b)$ *(középérték-tulajdonság),*

(ii) $M(a,b) = M(b,a)$ *(szimmetria),*

(iii) $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$*, ahol* $\lambda > 0$ *tetszőleges (pozitív homogenitás).*

Bizonyítás. A közepek definíciója alapján a szimmetria és a pozitív homogenitás nyilvánvaló. A szimmetria miatt feltehető, hogy $a \geqslant b$, ekkor

$$b = \frac{b+b}{2} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{a+a}{2} = a, \qquad b = \sqrt{bb} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \sqrt{aa} = a$$

vagyis teljesül a középérték-tulajdonság. □

3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha (i)-ben valamelyik egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, akkor szükségképpen $a = b$ (és így mindkét egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn), és megfordítva, ha $a = b$, akkor mindkét helyen egyenlőség teljesül. Erre a tulajdonságra szokás úgy hivatkozni, hogy $M(a,b)$ *diagonális.*

A fenti tulajdonságok szinte nyilvánvalóak, mégis érdemes volt őket külön kiemelni, mert mindegyiket lépten-nyomon (sokszor kimondatlanul) használjuk. Ráadásul az (i) tulajdonság megindokolja a *közép* elnevezést. Másrészt az általános esetben, kettő helyett n szám számtani és mértani közepeit tekintve is érvényben maradnak, és például a homogenitás alkalmazható a közepek közötti egyenlőtlenség igazolásában.

Ezek után rátérünk a cikk címében szereplő fogalom bevezetésére. Legyenek a, b pozitív valós számok és értelmezzük az (a_n), (b_n) sorozatokat a következő *rekurzióval* (lásd a [11] könyv 48. oldalán a 46. feladatot, illetve a [6] könyv I. kötetének 61–62. oldalait):

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b \tag{3}$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad\qquad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}. \tag{4}$$

Más szóval a sorozatok $(n+1)$-edik tagjai rendre az n-edik tagok számtani, illetve mértani közepe, azaz $a_{n+1} = A(a_n, b_n)$, és $b_{n+1} = G(a_n, b_n)$.

4. Állítás. *Az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a \geqslant b$, hiszen mind a számtani, mind pedig a mértani közép szimmetrikus, így a és b felcserélésével a két sorozat nem változik meg. A számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenség alapján $b_n \leqslant a_n$ minden $n \geqslant 0$ esetén, így a középérték-tulajdonság miatt $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_n$ és $b_n \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, tehát $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$. Vagyis az alábbi nagyságrendi reláció írható fel:

$$b \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant a_2 \leqslant a_1 \leqslant a. \tag{5}$$

Ez azt jelenti, hogy (a_n) monoton csökkenő, (b_n) pedig monoton növő sorozat, továbbá mindkettő korlátos. Ismert, hogy ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens (lásd a [10] könyv 159–163., és a [11] könyv 36–41. oldalait), így mind (a_n), mind pedig (b_n) konvergens, határértékeik legyenek rendre α, β. Ekkor a (4) rekurzív definíció miatt a határértékekre $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$ és $\beta = \sqrt{\alpha\beta}$ teljesül. Ez viszont (a diagonalitásból következően) azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. □

5. Megjegyzés. A bizonyítást a következőképpen is befejezhettük volna. A (b_n) sorozat monoton növekedése folytán

$$0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2},$$

ahonnan indukcióval kapjuk, hogy

$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2^n}(a - b).$$

Az $(a_n - b_n)$ sorozatot tehát közrefogtuk két 0-hoz tartó sorozattal, ezért a rendőrelv[1] miatt az $(a_n - b_n)$ sorozatnak is 0-hoz kell tartania. Mivel (a_n) és (b_n) külön-külön konvergensek, ezért határértékeik szükségképpen megyegyeznek.

A most bizonyított állítás alapján természetesen adódik a következő fogalom.

6. Definíció. Adott a, b pozitív számok esetén a (3)–(4) rekurzióval definiált (a_n), (b_n) sorozatok közös határértékét az a és b számok *számtani-mértani középének* nevezzük és a továbbiakban $AG(a, b)$-vel jelöljük. Ezenkívül az (a_n), (b_n) sorozatokra a számtani-mértani közepet definiáló sorozatokként hivatkozunk, illetve használjuk a számtani-mértani közép rekurziója (vagy *iterációja*) elnevezést is.

Könnyen látható, hogy a számtani és a mértani közép tulajdonságai öröklődnek a számtani-mértani középre.

7. Állítás. *Legyenek a, b pozitív valós számok. Ekkor az alábbiak teljesülnek:*

(i) $\min(a, b) \leqslant G(a, b) \leqslant AG(a, b) \leqslant A(a, b) \leqslant \max(a, b)$,

(ii) $AG(a, b) = AG(b, a)$ *(szimmetria),*

(iii) $AG(\lambda a, \lambda b) = \lambda AG(a, b)$, *ahol* $\lambda > 0$ *tetszőleges (pozitív homogenitás),*

(iv) $AG(a, b) = AG(a_k, b_k)$ *minden* $k \geqslant 0$ *esetén, ahol* (a_n) *és* (b_n) *az* a, b *számok számtani-mértani közepét definiáló sorozatok (invariancia).*

Bizonyítás. A számtani-mértani közép szimmetriája következik a számtani és a mértani közép szimmetriájából, hiszen a és b felcserélésével az (a_n), (b_n) sorozatok nem változnak meg. Hasonlóan, a számtani-mértani közép pozitív homogenitása a számtani és a mértani közép pozitív homogenitásának következménye: λa és λb számtani-mértani közepét definiáló sorozatok éppen (λa_n) és (λb_n), amelyek közös határértéke λ-szorosa az (a_n), (b_n) sorozatok közös határértékének. Ezenkívül az (5) egyenlőtlenségláncolat alapján az (i) „erős" középértéktulajdonság is nyilvánvalóan teljesül, hiszen $a_1 = A(a, b)$ és $b_1 = G(a, b)$. Végül gondoljuk meg, hogy rögzített $k \geqslant 0$ esetén az a_k, b_k számok számtani-mértani közepét definiáló sorozatok éppen az (a_n), (b_n) sorozatok „eltoltjai", vagyis az első k tag elhagyásával keletkező sorozatok. A tagok elhagyása a határértéket nem befolyásolja, ezért $AG(a, b) = AG(a_k, b_k)$. □

[1] A rendőrelv (vagy csendőrelv) szerint, ha (x_n), (y_n), (z_n) olyan számsorozatok, amelyekre $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, továbbá $x_n \to x$ és $z_n \to x$, akkor szükségképpen $y_n \to x$. Tréfásan fogalmazva, ha x_n és z_n két „rendőr" és y_n a „letartóztatott", akkor y_n kénytelen „oda tartani", ahova a két „rendőr" tart. Lásd a [10] könyv 143–145. oldalait és a [11] könyv 31. oldalán a 10. feladatot.

8. Megjegyzés. A (iv) tulajdonság a $k = 1$ speciális esetben azt jelenti, hogy

$$AG(a, b) = AG(A(a, b), G(a, b)) = AG\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right),$$

azaz két szám számtani és mértani közepének számtani-mértani közepe megegyezik a két szám számtani-mértani közepével. Más szóval a számtani-mértani közép invariáns a (3)–(4) rekurzióbeli (a_n), (b_n) sorozatokra nézve. Ez az invarianciatulajdonság a későbbiekben fontos szerepet fog játszani.

1. Feladat. Mutassuk meg, hogy a számtani-mértani közép diagonális, sőt, ha az (i) egyenlőtlenségláncolatban valahol egyenlőség teljesül, akkor mindenhol egyenlőség áll fenn.

A (3)–(4) rekurzió (vagy iteráció) kapcsán érdemes egy, az alkalmazások szempontjából igen lényeges tulajdonságra kitérnünk. Mivel egyelőre nincs explicit formulánk két szám számtani-mértani közepére (és hogyha lesz is, ki tudja, hogy azzal vajon könnyen tudunk-e majd számolni), ezért ha kiváncsiak vagyunk két konkrét szám számtani-mértani közepére, akkor nem tehetünk mást, mint az iterációban néhány lépést kiszámolunk. Ekkor várhatóan egy jó közelítést kapunk a számtani-mértani középre. Kérdés, hogy hány lépést végezzünk el (természetesen minél kevesebbet szeretnénk), ha adott tizedesjegynyi pontosságot szeretnénk. Más szóval milyen „gyorsan” fog konvergálni a két sorozat? E kérdés megválaszolásához vegyük észre, hogy (2) miatt

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2,$$

ezért

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(a_n - b_n)^2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}.$$

A fenti egyenlőség jobb oldalán álló kifejezés konvergens, ezért „elég nagy n-re közel lesz egy konstanshoz” (méghozzá $\frac{1}{8AG(a,b)}$-hez). Azt mondhatjuk tehát, hogy az $(a_n - b_n)$ nullsorozat $(n+1)$-edik tagja az n-edik tag négyzetének (nemnulla) konstansszorosával felülről becsülhető. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $(a_n - b_n)$ sorozat *másodrendben* (vagy *négyzetesen*) konvergál 0-hoz. Durván fogalmazva, minden lépés során megduplázódik a pontos tizedesjegyek száma $(a_n - b_n)$-ben. Ez a négyzetes konvergenciasebesség valójában azt is jelenti, hogy a (3)–(4) iteráció egy rendkívül gyors és hatékony eljárás a számtani-mértani közép konkrét numerikus kiszámítására, és ennek a későbbi alkalmazások szempontjából nagy jelentősége van.

A (3)–(4) rekurzió először Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz származású francia matematikus egy 1785-ben megjelent cikkében szerepelt. A közös határérték létezését felhasználva algoritmust dolgozott ki úgynevezett elliptikus integrálok közelítő kiszámítására. Lagrange-tól függetlenül Carl Friedrich Gauss (1777–1855) 1791-ben, 14 éves korában „újrafelfedezte” a rekurziót. Tőle származik a számtani-mértani közép elnevezés, és ő volt az, aki későbbi vizsgálódásai folyamán észrevette a számtani-mértani közép viszonylag egyszerű fogalma mögött rejlő mély matematikai összefüggéseket, amelyek fontos szerepet töltöttek be az elliptikus integrálok és függvények elméletének kialakulásában. A következőkben röviden bemutatjuk a számtani-mértani középhez vezető út főbb állomásait, majd vázoljuk Gauss eredményeit, és ezzel egyúttal rövid betekintést nyújtunk az elliptikus integrálok elméletébe és annak történetébe.

2. A Bernoulli-féle lemniszkáta

A történet a 17. század végéig nyúlik vissza, amikor Isaac Newton (1642–1727) és Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) egymástól függetlenül (és egymástól eltérő szemlélettel) megalapozták és kidolgozták a differenciál- és integrálszámítás elemeit. Az új matematikai eszközöket a kor tudósai többek között a mechanikából származó geometriai jellegű problémák megoldására próbálták alkalmazni. Általában olyan görbék meghatározása volt a feladat, amelyeket egy adott „részecske" bizonyos kényszererők hatására leír. Talán az egyik legismertebb a Johann Bernoulli (1667–1748) svájci matematikus által felvetett *brachisztochron probléma*: határozzuk meg azt a görbét, amely mentén (súrlódásmentes esetet feltételezve) egy golyó az állandó nehézségi erő hatására a legrövidebb idő alatt legurul. Johann és testvére, Jakob Bernoulli (1654–1705) rengeteg hasonló kérdést vetett fel és tanulmányozott. Az *isochrona paracentrica* probléma a következő volt: melyik az a görbe, amely mentén leguruló test egyenlő időközök alatt egyenlő utakat tesz meg. E probléma vizsgálata során jutott el Jakob 1694-ben az alábbi egyenlethez:

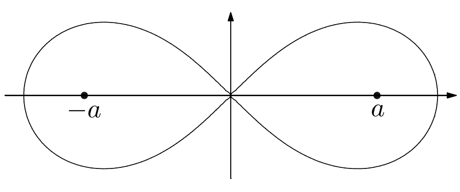
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \tag{6}$$

Jakob a görbét egy „elfordított nyolcashoz" hasonlította és *lemniscus*nak nevezte el, amely görögül szalagot jelent. A fenti egyenlettel meghatározott görbét, amelyet *(Bernoulli-féle) lemniszkátának* szokás hívni az 1. ábra szemlélteti.

2. Feladat. Írjuk fel a lemniszkáta polárkoordinátás egyenletét, azaz végezzük el az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ helyettesítést, ahol $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, majd ellenőrizzük az 1. ábrán a görbe alakjának helyességét!

Valójában ez a görbe már néhány évvel korábban ismert volt. Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) olasz matematikus és csillagász a Nap és a Föld egymáshoz viszonyított mozgásának tanulmányozása során 1680-ban a később róla elnevezett Cassini-féle oválisokat vizsgálta. Úgy gondolta, hogy a Nap a Föld körül egy olyan ovális pályán kering, amelynek két, egymástól $2a$ távolságra lévő fókuszpontja van (az egyikben éppen a Föld helyezkedik el) és a pálya mentén lévő pontok két fókuszponttól mért távolságainak szorzata állandó (b^2).

3. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $a = b$ speciális esetben a Cassini-féle ovális éppen a Bernoulli-féle lemniszkáta! Más szóval, azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek az egymástól $2a$ távolságra lévő $(-a, 0)$ és $(a, 0)$ fókuszpontoktól mért távolságainak szorzata a^2, a (6) egyenlettel leírt lemniszkáta.



1. ábra.

Jegyezzük meg, hogy ha a két fókuszponttól mért távolságok szorzata helyett a távolságok összegét követeljük meg állandónak, akkor egy ellipszist kapunk (amelynek fogalmát Menaikhmosz görög matematikus már i.e. 350 körül bevezette).

Térjünk most vissza az említett mechanikai-geometriai jellegű feladatokhoz. Az alkalmazások miatt e problémák tanulmányozása nemcsak a testek mozgását leíró görbék egyenletének felírását jelentette, hanem ezen túlmenően fontos kérdés volt a görbék tulajdonságainak vizsgálata is, többek között az ívhosszuk meghatározása. A lemniszkáta ívhosszára Jakob Bernoullinak sikerült egy formulát felírnia. Az egyszerűség kedvéért a (6) egyenletben válasszuk az a paraméter értékét $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nek, ekkor a lemniszkáta pozitív síknegyedbe eső darabjának hossza[2]:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{7}$$

A fenti integrált *elsőfajú teljes elliptikus integrálnak* hívjuk (a teljesség az integrálás határaira utal). Általában *elsőfajú elliptikus integrálnak* az

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}} \tag{8}$$

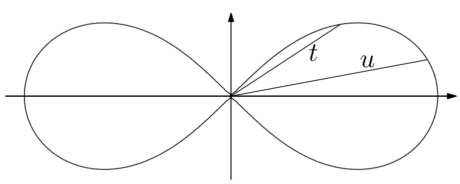
alakú függvényeket nevezzük, ahol p, q pozitív számok (és a $\pm$ előjelek bármely párosítása választható). Az ilyen típusú függvények inverzeit hívjuk *elliptikus függvényeknek*. Megjegyezzük, hogy a (7) integrál nemcsak a korábban említett isochrona paracentrica feladat kapcsán, hanem már 1691-ben előkerült Jakobnál az úgynevezett *elasztikus görbe* ívhosszának tanulmányozása során: milyen alakot vesz fel egy rugalmas rúd, amelyre mindkét végén összenyomó erő hat?

A lemniszkáta történetéhez mindenképpen meg kell említenünk, hogy Johann Bernoullinak, testvérétől függetlenül, ugyancsak sikerült felírnia a (6) egyenletet az isochrona paracentrica probléma megoldása során. Johann cikke azonban egy hónappal később jelent meg, mint Jakobé, ezzel elsőbbségi vitát kiváltva az amúgy is egymással versengő fivérek között.

A Bernoulli fivérek munkáit követően Giulio Carlo Fagnano (1682–1766) olasz matematikus (aki egyébként később hercegi címet is kapott) folytatta a lemniszkáta ívhosszához (és a (7) alakú integrálhoz) kötődő kérdések tanulmányozását. Fagnano fő eredménye a lemniszkáta „ívének megkétszerezése” volt. Sikerült algebrai műveletek segítségével meghatároznia, hogy milyen hosszú a lemniszkátának azon (origóból induló) húrja, amelyhez kétszer akkora lemiszkátaív tartozik, mint a t hosszúságú húrhoz. Nevezetesen, ha

$$u = \frac{2t\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} \tag{9}$$

akkor az u hosszúságú húrhoz kétszer akkora ív tartozik, mint a t hosszúságú húrhoz, lásd a 2. ábrát. A (9) képlet jelentősége abban rejlik, hogy a jobb oldalán szereplő kifejezés t ismeretében vonalzóval és körzővel megszerkeszthető, így a lemniszkáta egy ívének megkétszerezése is elvégezhető ezen eszközök segítségével. Ezt követően Fagnanonak sikerült eljárást kidolgoznia lemniszkátaívek n egyenlő részre osztására, ahol $n = 2^m$, $n =$



2. ábra.

[2]Mivel ebben és a következő szakaszban csak a történeti háttér ismertetésére törekszünk, ezért az előkerülő formulákat bizonyítás nélkül közöljük, a részleteket illetően lásd például az [5] cikket vagy a [6] könyv II. kötetének 144–147. és 184–185. oldalait.

$3 \cdot 2^m$ vagy $n = 5 \cdot 2^m$ alakú lehet. Eredményeit először egy kevéssé ismert folyóiratban közölte 1714 és 1720 között. Később, 1750-ben újra megjelentette munkáit és elküldte azokat a Berlini Tudományos Akadémiának, amelynek tagságára pályázott. Az Akadémia Leonhard Eulert (1707–1783) kérte fel Fagnano munkáinak átnézésre. Euler (aki Johann Bernoulli tanítványa volt) a Bernoulli testvérek munkái nyomán már 1728-tól kezdődően foglalkozott az elasztikus görbével és általában rugalmasságtani problémákkal, továbbá az ellipszis ívhosszával kapcsolatos kérdésekkel. E témakörök mindegyike az elliptikus integrálok vizsgálatához vezettek. (Ha ugyanis a (8) integrálban a $-\frac{1}{2}$ kitevőt $\frac{1}{2}$-re cseréljük, akkor a *másodfajú elliptikus integrálokat* kapjuk, amelyek többek között az ellipszis ívhosszához kapcsolódó problémákban fordulnak elő.)

Fagnano eredményei új lendületet adtak Euler korábbi vizsgálódásainak. A Fagnano-féle „ívkétszerezés" mintájára, azt lényegesen általánosítva úgynevezett addíciós formulát dolgozott ki, először (7), később pedig (8) alakú elliptikus integrálokra, és mindezt 1761-ben publikálta. Ezután további jelentős eredményeket ért el és ezzel megtette az első lépéseket az elliptikus integrálok elméletének kidolgozása felé. Ennek kapcsán Euler egy gyönyörű formuláját mindenképpen érdemes megemlítenünk:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \cdot \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

A fenti szorzatban szereplő első integrál, mint láttuk, a lemniszkáta ívhossza, a második integrál pedig az elasztikus görbével áll szoros kapcsolatban.

Eredményeivel Euler megalapozta az elliptikus integrálok elméletét, amelyet később Adrien-Marie Legendre (1752–1833) dolgozott ki klasszikus formában és 1826-ban kétkötetes monográfiában jelentetett meg. Ezt követően Niels Henrik Abel (1802–1829) norvég és Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851) porosz matematikusok (mindkettejük mentora Legendre volt) teljesen új megvilágításba helyezték az addigi elméletet. Ők az elliptikus integrálok inverzeit tanulmányozták és ezáltal bontakozott ki az elliptikus függvények modern elmélete. Munkáik jelentőségét (és Legendre nagyságát) mutatja, hogy Legendre egy harmadik kötettel egészítette ki monográfiáját, abban ismertetve Abel és Jacobi eredményeit.

A történethez hozzátartozik, hogy Fagnano akadémiai pályázatát Euler természetesen támogatta, így a Berlini Tudományos Akadémia tagjává választotta. Jacobi 1751. december 23-át, amikor is Euler megkapta Fagnano munkáit, a „matematika történetének egyik rendkívül fontos napjának" nevezte.

Fagnano munkásságát illetően ajánljuk az [1] cikket, továbbá felhívjuk a figyelmet a [8] dolgozatra, amelyben a lemniszkátának és az elliptikus integráloknak a harmadrendű görbékkel való kapcsolatáról olvashatnak az érdeklődők. A brachisztochron problémáról, valamint Lagrange, Euler és Gauss életéről és munkásságáról további részleteket a kiváló [7] műben találhat az Olvasó. Végül érdemes megemlíteni, hogy Giulio Fagnano fia, Giovanni Francesco Fagnano (1715–1797) ugyancsak beírta a nevét a matematika történetébe, ugyanis tőle származik a Fagnano-féle probléma: hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek közül melyiknek lesz minimális a kerülete?

3. A lemniszkáta és a számtani-mértani közép

Az Olvasó már bizonyára kíváncsi, vajon hogyan is kapcsolódik össze a Bernoulli-féle lemniszkáta és számtani-mértani közép fogalma. Az elliptikus integrálok minél egyszerűbb kiszámítása a mechanikai alkalmazások szempontjából lényeges kérdés volt. Már Euler is próbált számítási módszereket kidolgozni, de azok még igen nehézkesek voltak. Az igazi áttörést azonban Lagrange 1785-ös cikke jelentette, amelyben több módszert is adott a (8) alakú integrálok egyszerű kiszámítására. Az egyik módszerében definiálta a p, q számok számtani-mértani közepének rekurzióját (amelyet ő még nem nevezett így), majd megfigyelte a közös határérték létezését, és egy transzformáció segítségével sikerült egyszerűbb alakra hoznia a (8) integrált.

Gauss 1791-ben, 14 éves korában „újrafelfedezte” a rekurziót. Az igazi felfedezést azonban 1799. május 30-án tette, amikor észrevette, hogy

$$AG(1, \sqrt{2}) \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Gauss a fenti összefüggést először csak „egyszerű” számolással látta be, 19 tizedesjegy pontossággal(!) kiszámolta $AG(1, \sqrt{2})$ értékét (az $AG(1, \sqrt{2})$ reciprokát szokás Gauss-féle konstansnak hívni). Természetesen Gauss felfedezésének voltak előzményei. Egyrészt ekkorra a (7) integrálra már igen pontos közelítő értékek voltak ismertek, többek között James Stirling (1692–1770) skót matematikusé, aki 16 tizedesjegy pontossággal számolta ki az integrál értékét. Másrészt Gauss ismerte Euler (10) formuláját is, továbbá az abban szereplő integrálok közelítő értékeit. Ennek ellenére a fenti (11) összefüggés felismerése óriási jelentőségű volt, ahogy naplójában fogalmazott, ezzel „az analízis egy teljesen új területe nyílt meg”. Ezt követően Gaussnak sikerült (több) bizonyítást adnia a (11) formulára, sőt később az alábbi sokkal általánosabb összefüggést is belátta:

9. Állítás. *Tetszőleges a, b pozitív számok esetén*

$$AG(a, b) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Látszólag az $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ esetben adódó integrál nem hasonlít a (11) formulában szereplő integrálra. Azonban a fenti állításban szereplő integrál egy egyszerű helyettesítéssel (8)-hoz hasonló, úgynevezett Jacobi-féle alakra hozható.

Gauss további vizsgálódásai folyamán a számtani-mértani közép fogalmát komplex számokra is kiterjesztette. Ezenkívül a trigonometrikus függvények mintájára bevezette az úgynevezett lemniszkáta-függvényeket: a „sinus lemniscus” függvényt a (7) integrál(függvény) inverzeként értelmezte. Az elliptikus integrálok inverzeivel és a komplex számtani-mértani középpel kapcsolatos eredményei az elliptikus függvények elméletének kialakulásában fontos szerepet töltöttek be, Abel és Jacobi munkái előfutárának tekinthető.

4. Variációk egy témára

Az előzőekben megismertük a számtani-mértani közép fogalmát és történetét. Most nézzük meg, mi történik, ha a számtani-mértani közép iterációjában az egyik közepet „kicseréljük” egy másikra, méghozzá a harmonikus középre. Ehhez először emlékeztetünk a harmonikus közép fogalmára és néhány tulajdonságára.

10. Definíció. Adott a, b pozitív számok *harmonikus közepe* $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Figyeljük meg, hogy két pozitív szám harmonikus közepe a reciprokaik számtani közepének reciproka, vagyis $H(a,b) = \frac{1}{A(\frac{1}{a};\frac{1}{b})}$. Ebből az észrevételből könnyen adódik a mértani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség:

$$H(a,b) \leqslant G(a,b)$$

minden pozitív valós szám esetén, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Valóban, a számtani és a mértani közép közötti (1) egyenlőtlenség miatt

$$H(a,b) = \frac{1}{A(\frac{1}{a},\frac{1}{b})} \leqslant \frac{1}{G(\frac{1}{a},\frac{1}{b})} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}} = \sqrt{ab} = G(a,b).$$

A számtani, mértani és harmonikus közepekre tehát az alábbi egyenlőtlenségláncolat áll fenn:

$$H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b),$$

ahol egyenlőség pontosan $a = b$ esetén teljesül.

4. Feladat. Mutassuk meg, hogy a harmonikus középre teljesül a középérték-tulajdonság, diagonális, szimmetrikus és pozitív homogén.

Végül említsük meg a harmonikus közép egy érdekes speciális tulajdonságát. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy tetszőleges a, b pozitív számok esetén $A(a,b) \cdot H(a,b) = ab$, azaz

$$G(A(a,b), H(a,b)) = G(a,b), \tag{13}$$

amit úgyis megfogalmazhatunk, hogy két szám számtani és harmonikus közepének mértani közepe a két szám mértani közepe.

Most már készen állunk a számtani-harmonikus közép definiálására. Legyenek a, b pozitív valós számok és értelmezzük az (a_n) és (b_n) sorozatokat az alábbi rekurziókkal (lásd a [11] könyv 48. oldalán a 45. feladatot, illetve a [6] könyv I. kötetének 62–63. oldalait):

$$a_0 := a \qquad b_0 := b \tag{14}$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} := \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}. \tag{15}$$

Szavakban kifejezve, a sorozatok $(n+1)$-edik tagjai rendre az n-edik tagok számtani, illetve harmonikus közepe, azaz $a_{n+1} = A(a_n, b_n)$ és $b_{n+1} = H(a_n, b_n)$.

11. Állítás. *Az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük, mégpedig $G(a,b)$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a \geqslant b$. Ekkor a 4. Állítás bizonyításában alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan, a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség, illetve a középérték-tulajdonság felhasználásával kapjuk, hogy

$$b \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant a$$

minden $n \geqslant 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy (a_n), (b_n) monoton és korlátos sorozatok, ezért mindkettő konvergens, határértékeik legyenek rendre α és β. Ekkor a (14)–(15) rekurzióból következően $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$ és $\beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$, ami a diagonalitás miatt éppen azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. (Jegyezzük meg, hogy a határértékek megegyezése az 5. Megjegyzésben látott módon is belátható: a (b_n) sorozat monoton növekedéséből adódóan $0 \leqslant a_n - b_n \leqslant 2^{-n}(a-b)$.) Jelöljük a két sorozat közös határértékét α-val! Vegyük észre, hogy a (13) összefüggés miatt

$$G(a_{n+1}, b_{n+1}) = G(A(a_n, b_n), H(a_n, b_n)) = G(a_n, b_n) \tag{16}$$

ahonnan indukcióval $G(a_n, b_n) = G(a, b)$ adódik minden $n \geqslant 0$-ra. Innen a bizonyítást kétféleképpen is befejezhetjük. Egyrészt a közepek közötti egyenlőtlenség alapján minden n-re $b_{n+1} \leqslant G(a_n, b_n) \leqslant a_{n+1}$, vagyis $b_{n+1} \leqslant G(a, b) \leqslant a_{n+1}$, ezért a rendőrelv miatt szükségképpen $\alpha = G(a, b)$. Másfelől a (16) összefüggésben elvégezve a határátmenetet (a mértani közép folytonosságának felhasználásával) $G(a, b) = G(\alpha, \alpha) = \alpha$ adódik. □

12. Megjegyzés. Az előbbi bizonyításban a közös határérték meghatározásának (utóbbi) ötletét érdemes külön kiemelnünk. Gondoljuk meg, hogy az $\alpha = G(a, b)$ egyenlőség két alapvető tulajdonságon múlt. Egyfelől a (16) *invariancián*: a mértani közép (mint kétváltozós függvény) invariáns a (14)–(15) iterációra nézve, azaz $G(a_{n+1}, b_{n+1}) = G(a_n, b_n)$ minden n-re; másrészt azon, hogy $G(\alpha, \alpha) = \alpha$. Érvényes tehát a következő állítás.

13. Állítás. (invarianciaelv) *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) pozitív tagú sorozatok konvergensek és közös a határértékük, amely legyen α. Ha $\Phi\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza) olyan kétváltozós függvény, amely folytonos, továbbá $\Phi(x, x) = x$ minden $x > 0$ esetén, valamint Φ invariáns a két sorozatra nézve, azaz $\Phi(a_{n+1}, b_{n+1}) = \Phi(a_n, b_n)$ minden n-re, akkor $\alpha = \Phi(a_0, b_0)$.*

Az invarianciaelv segítségével a (12) Gauss-féle formula egy lehetséges bizonyításának ötlete is azonnal kirajzolódik. Definiáljuk a Φ kétváltozós függvényt az alábbi módon:

$$\Phi(a, b) := \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \right)^{-1}.$$

Ekkor Φ folytonos, ezenkívül $x > 0$ esetén

$$\frac{1}{\Phi(x, x)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x} = \frac{1}{x},$$

így $\Phi(x, x) = x$. Elég lenne tehát megmutatni, hogy Φ invariáns a számtani-mértani közép iterációjára nézve, vagyis $\Phi(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = \Phi(a, b)$ minden a, b pozitív számra, ekkor az invarianciaelv miatt $\Phi(a, b) = AG(a, b)$. Az invariancia igazolása az úgynevezett Gauss-féle transzformációval történhet, amely az elliptikus integrálok elméletében egy fontos integrálátalakító transzformáció, lásd például az [5] cikket, vagy a [6] könyv II. kötetének 144-147. oldalait. A transzformáció első formája már Lagrange korábban említett cikkében megjelent, később Gauss tőle függetlenül általánosabb alakban alkalmazta.

Térjünk most vissza a számtani-harmonikus közepet (amely valójában a mértani közép) definiáló (14)–(15) iterációhoz néhány tulajdonság erejéig.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy a (14)–(15) iteráció másodrendben konvergens, pontosabban

$$\frac{a_{n+1}-\sqrt{ab}}{(a_n-\sqrt{ab})^2}=\frac{1}{2a_n}\approx\frac{1}{2\sqrt{ab}},\qquad \frac{b_{n+1}-\sqrt{ab}}{(b_n-\sqrt{ab})^2}=\frac{\sqrt{ab}}{(a_n+b_n)b_n}\approx\frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

(Útmutatás: használjuk a (16) invarianciát.)

A (16) invariancia segítségével a (14)–(15) rekurziót átírhatjuk „egydimenziós alakba". Legyen $s = ab = a_n b_n$, ekkor $b_n = \frac{s}{a_n}$, és ezt a (15) rekurzióba helyettesítve kapjuk, hogy

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{s}{a_n}\right). \tag{17}$$

A fenti eljárás az úgynevezett Héron-féle (vagy babiloni) módszer, amelyet először Héron (kb. i.sz. 10–70) görög matematikus írt le. A módszer egy adott s pozitív valós szám négyzetgyökének közelítő kiszámítására szolgál. Adott $a_0 = a$ pozitív kezdőértékből kiindulva az (a_n) sorozat tagjai egyre jobban megközelítik $\sqrt{s}$-t. Valóban, ezt most bizonyítanunk sem kell, hiszen a Héron-féle módszer a (14)–(15) számtani-harmonikus közép iterációjának egydimenziós alakja, és láttuk, hogy az (a_n) (és a (b_n)) sorozat határértéke éppen $\sqrt{ab} = \sqrt{s}$. Ezzel a Héron-féle módszer konvergenciájára egy új bizonyítást nyertünk. Sőt, az 5. Feladat alapján tudjuk, hogy a számtani-harmonikus közép iterációja másodrendben konvergál, így a Héron-féle módszer is másodrendű. Ez azt jelenti, hogy ez a módszer egy gyors és hatékony eljárás egy szám négyzetgyökének közelítő kiszámítására. A módszerről részletesebben lásd még a [10] könyv 109–112. oldalait, illetve a [11] könyv 46. oldalán a 40. feladatot.

A szakasz lezárásaként vizsgáljuk meg mit kapunk, ha a számtani-mértani közepet definiáló rekurzióban a mértani közép helyett a számtani közepet „cseréljük" a harmonikus középre. Definiáljuk tehát az (a_n), (b_n) sorozatokat oly módon, hogy

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b \tag{18}$$

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad\qquad b_{n+1} := \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}. \tag{19}$$

ahol a, b adott pozitív valós számok.

14. Állítás. *Az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük, méghozzá* $\frac{1}{AG(\frac{1}{a},\frac{1}{b})}$.

6. Feladat. Bizonyítsuk be a 14. Állítást! (Útmutatás: fogalmazzuk át a (18)–(19) rekurziót a sorozatok reciprokaira.)

15. Definíció. A (18)–(19) sorozatok közös határértékét az a és b számok *mértani-harmonikus közepének* hívjuk és a továbbiakban $GH(a, b)$-vel jelöljük.

A 14. Állítás értelmében a mértani-harmonikus közép a reciprokok számtani-mértani közepének reciproka, ezért bizonyos értelemben úgy viselkedik, mint a harmonikus közép.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy a mértani-harmonikus közép szimmetrikus, pozitív homogén, $GH(a,b) = GH(a_k, b_k)$ minden k-ra, ahol (a_n), (b_n) a mértani-harmonikus közepet definiáló (18)–(19) sorozatok, továbbá

$$\min(a,b) \leqslant H(a,b) \leqslant GH(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant AG(a,b) \leqslant A(a,b) \leqslant \max(a,b),$$

ahol egyenlőség pontosan $a = b$ esetén teljesül, valamint

$$G(AG(a,b), GH(a,b)) = G(a,b). \tag{20}$$

8. Feladat. Milyen invariancia tulajdonságot jelent a (20) összefüggés?

5. Általánosítás: Gauss-féle rekurziók

Az előzőek mintájára az Olvasó is megpróbálkozhat rekurziók értelmezésével, például a számtani-mértani közép iterációjában valamelyik közepet a négyzetes középre cserélve. Noha az így kapott sorozatok konvergenciája egyszerűen belátható, a közös határértéket általában nem lehet „szép” alakra hozni. Ez nagyrészt azon múlik, hogy meg tudjuk-e találni az invariáns függvényt. Mindenesetre érdemes a kérdéskört általánosan is megfogalmazni, ez a korábbiak alapján nem fog nehézséget okozni. Definiáljuk tehát absztrakt közepek fogalmát!

16. Definíció. Legyen $M\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Ekkor M-et *középnek* nevezzük, ha teljesül rá a középérték-tulajdonság, azaz

$$\min(a,b) \leqslant M(a,b) \leqslant \max(a,b). \tag{21}$$

Legyen M és N két közép. Ekkor definiálhatjuk az alábbi *Gauss-féle rekurziót*:

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b \tag{22}$$

$$a_{n+1} := M(a_n, b_n) \qquad\qquad b_{n+1} := N(a_n, b_n), \tag{23}$$

ahol a és b adott pozitív számok. A korábbi szakaszokban szereplő rekurziók vizsgálatánál láttuk, hogy a kapott sorozatok konvergenciája lényegében a közepek között fennálló egyenlőtlenségeken (és a középérték-tulajdonságon), a közös határérték létezése pedig a diagonalitáson múlt. Érdemes tehát definiálnunk absztrakt közepek diagonalitásának és összehasonlíthatóságának fogalmát.

17. Definíció. Legyen M és N két közép. Ekkor M *szimmetrikus*, ha $M(a,b) = M(b,a)$ minden a,b pozitív számra, M *diagonális*, ha a (21) egyenlőtlenségláncolatban pontosan $a = b$ esetén teljesül egyenlőség (bármelyik egyenlőtlenségben). Ezenkívül azt mondjuk, hogy M *összehasonlítható* N-nel, ha az alábbi három feltétel közül legalább az egyik teljesül:

(i) $M(a,b) \geqslant N(a,b)$ minden a,b pozitív számra;

(ii) $N(a,b) \geqslant M(a,b)$ minden a,b pozitív számra;

(iii) $M(a,b) \geqslant N(a,b)$, ha $a > b > 0$, és $N(a,b) \geqslant M(a,b)$, ha $b > a > 0$.

Világos, hogy ha M és N szimmetrikus közepek és M összehasonlítható N-nel, akkor fordítva is igaz, N összehasonlítható M-mel. Ez a megfordítás azonban általában (nevezetesen, ha (iii) teljesül és $M \neq N$, akkor) nem igaz.

18. Állítás. *Tegyük fel, hogy M és N diagonális közepek, továbbá M összehasonlítható N-nel. Ekkor a (22)–(23) rekurzióval definiált (a_n), (b_n) sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (iii) eset áll fenn és $a \geqslant b$. Ekkor $b_1 = N(a,b) \leqslant M(a,b) = a_1$. Ha valamilyen n-re $b_n \leqslant a_n$ teljesül, akkor az összehasonlíthatóság folytán $b_{n+1} = N(a_n, b_n) \leqslant M(a_n, b_n) = a_{n+1}$, továbbá a középérték-tulajdonság miatt $b_n \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ és $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_n$, tehát $b \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant a$ minden n-re. Ez azt jelenti, hogy (a_n), (b_n) korlátos és monoton sorozatok, ezért mindkettő konvergens, határértékeik legyenek rendre α és β. A (22)–(23) rekurzió (és M, N folytonossága) miatt szükségképpen $\alpha = M(\alpha,\beta)$ és $\beta = N(\alpha,\beta)$, és így a diagonalitásból következően $\alpha = \beta$. Az $a < b$ eset teljesen hasonlóan vizsgálható, csupán az (a_n), (b_n) sorozatok szerepét kell felcserélni. Ha pedig (i) vagy (ii) teljesül, akkor a fenti bizonyítás szóról-szóra megismételhető. Jegyezzük meg, hogy a diagonalitásból valójában csak annyit használtunk fel, hogy legalább az egyik közép rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. □

19. Definíció. Az (a_n), (b_n) sorozatok közös határértékét az M és N közepek „keverékének”[3] nevezzük és a továbbiakban $MN(a,b)$-vel jelöljük.

20. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 18. Állítás bizonyításából az is kijött, hogy MN rendelkezik a középérték-tulajdonsággal. Belátható, hogy MN folytonos is, tehát közép. Vigyázzunk, hogy általában M és N keveréke különbözik N és M keverékétől. Ha azonban M és N szimmetrikus közepek, akkor könyen láthatóan $NM(a,b) = MN(a,b)$. Gondoljuk meg (a 7. Állítás és a 7. Feladat mintájára), hogy M és N esetleges közös speciális tulajdonságai (mint például szimmetria, homogenitás) öröklődnek MN-re. Megemlítjük, hogy a 18. Állításban az összehasonlíthatóság feltétele valójában elhagyható. A részleteket illetően lásd a [3] könyvet.

Nézzünk meg most egy konkrét példát a 18. Állítás szemléltetésére! Legyen

$$M(a,b) = \frac{3a+b}{4}, \qquad N(a,b) = \frac{a+2b}{3}. \tag{24}$$

Világos, hogy M és N nem szimmetrikusak. Könnyen látható, hogy teljesül a középérték-tulajdonság és a diagonalitás: például, ha $a \geqslant b$, akkor

$$b = \frac{3b+b}{4} \leqslant \frac{3a+b}{4} \leqslant \frac{3a+a}{4} = a, \quad b = \frac{b+2b}{3} \leqslant \frac{a+2b}{3} \leqslant \frac{a+2a}{3} = a,$$

és nyilván egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$. Egyszerű számolással adódik, hogy $M(a,b) - N(a,b) = \frac{5}{12}(a-b)$, így M összehasonlítható N-nel (a (iii) eset áll fenn). Ekkor a 18. Állításból következően létezik $MN(a,b)$. Ennek explicit felírásához vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{7}(4a_{n+1} + 3b_{n+1}) = \frac{1}{7}(3a_n + b_n + a_n + 2b_n) = \frac{1}{7}(4a_n + 3b_n),$$

vagyis a $\Phi(x,y) = \frac{1}{7}(4x+3y)$ függvény invariáns az (a_n), (b_n) sorozatokra nézve. Mivel $\Phi(x,x) = \frac{7x}{7} = x$, ezért az invarianciaelvből következően $MN(a,b) = \frac{1}{7}(4a+3b)$.

[3] Az angol nyelvű szakirodalomban: compound mean.

9. Feladat. Legyen

$$M(a,b) = \sqrt{a\frac{a+b}{2}}, \qquad N(a,b) = \sqrt{\frac{a+b}{2}b}.$$

Igazoljuk, hogy $a \neq b$ esetén

$$MN(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2(\log a - \log b)}}.$$

(Útmutatás: az $a = b$ határeset vizsgálatához használjuk fel, hogy $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log x} = 1$, lásd a [11] könyv 217. oldalán a 35. feladatot. Lásd még a [4] cikket is.)

6. Alkalmazás: a π és a számtani-mértani közép

A cikk végén ejtsünk szót a számtani-mértani közép lehetséges alkalmazásainak kérdéséről. Láttuk, hogy már Lagrange is egy konkrét alkalmazás miatt definiálta a számtani-mértani közép iterációját: elliptikus integrálokat akart minél egyszerűbb alakra hozni. Megmutattuk, hogy az iteráció gyorsan konvergál, tehát egy hatékony eljárás, amely Gauss (12) formulája alapján (elsőfajú teljes) elliptikus integrálok közelítő kiszámítására használható.

Az elliptikus integrálok elméletének kialakulása után a számtani-mértani közép fogalma kissé feledésbe merült (és manapság sem túl közismert, annak ellenére, hogy részben elemi eszközökkel is tárgyalható). A 20. században Richard Brent és Eugene Salamin matematikusok újrafelfedezték Gauss néhány eredményét. Egymástól függetlenül 1976-ban a π közelítő kiszámítására egy rendkívül hatékony algoritmust dolgoztak ki, amely a Gauss-féle számtani-mértani közép iterációján alapul. Brent ezen túlmenően azt is észrevette, hogy hasonló eljárás segítségével bizonyos elemi függvények (például a logaritmusfüggvény) is hatékonyan számolhatók.

Az alábbiakban röviden ismertetjük a Brent-Salamin-algoritmust. Képezzük az $(a_n), (b_n), (t_n)$ sorozatokat a következő rekurziókkal:

$$a_0 := 1, \qquad b_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad t_0 := 1, \tag{25}$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad t_{n+1} := t_n - 2^n(a_n^2 - b_n^2). \tag{26}$$

21. Állítás. *A* $\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{t_n}$ *sorozat másodrendben a* π*-hez konvergál.*

A fenti állítás bizonyítása az elliptikus integrálok Legendre-féle azonosságán múlik (amely szoros kapcsolatban áll az Euler-féle (10) formulával). Ezért a (25)–(26) rekurziót Gauss-Legendre-algoritmusnak is szokás hívni. A másodrendű konvergencia miatt minden lépésben megkétszereződik a pontos tizedesjegyek száma π_n-ben, ez már néhány lépés elvégzése után is jól látszik: az első 8 lépés a π-nek rendre 0, 3, 8, 19, 41, 94, 171, 344 tizedesjegyét állítja elő pontosan.

Az 1980-as évek elejétől kezdődően Yasumasa Kanada japán matematikus és munkatársai a fenti eljárás segítségével „nekiláttak” a π minél több tizedesjegyének kiszámolásához, és ezzel az elmúlt 30 évben sorra állították fel a rekordokat.

1981-ben a π-nek 2 millió tizedesjegyét számolták ki pontosan, 1983-ban már 16 millió tizedesjegyet, 1988-ra 201 millió, 1999-re pedig 206 milliárd tizedesjegyet sikerült pontosan kiszámolniuk. A 2002-es rekord, amelyet ugyancsak Kanada és csapata állított fel: 1241100000000 tizedesjegy.

Érdemes megemlíteni, hogy Jonathan és Peter Borwein az 1980-as évek közepétől a Brent-Salamin-algoritmushoz hasonló, de annál még gyorsabban konvergáló eljárásokat dolgozott ki a π, illetve az $\frac{1}{\pi}$ kiszámítására. A π közelítő számításának történetéről, illetve a számtani-mértani középpel való kapcsolatáról az érdeklődők a [9] cikkben és a [3] könyvben bővebben olvashatnak.

A π tizedesjegyeinek az előbbiekben ismertetett pontosságokkal történő kiszámítása természetesen túlmegy az alkalmazhatóság körén. Ezzel kapcsolatban ismert a következő anekdota (lásd [2]). A π-nek csupán az első 39 tizedesjegye elegendő ahhoz, hogy az univerzum sugarával azonos sugarú kör kerületét ki tudjuk számolni egy hidrogénatom sugarának megfelelő pontossággal. Ennek igazolását (vagy megcáfolását) az Olvasóra bízzuk.

Hivatkozások

[1] Ayoub, R., The Lemniscate and Fagnano's Contributions to Elliptic Integrals, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 29 (1984), 131–149.

[2] Borwein, J. M. – Borwein, P. B., The Arithmetic-Geometric Mean and Fast Computation of Elementary Functions, *SIAM Review*, Vol. 26, No. 3 (1984), 351–366.

[3] Borwein, J. M. – Borwein, P. B., *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley, New York, 1987.

[4] Carlson, B. C., Algorithms Involving Arithmetic and Geometric Means, *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), 496–505.

[5] Cox, D. A., The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss, *L'Ensign. Math.*, 30 (1984), 275–330.[4]

[6] Fichtenholz, G. M., Differential- und Integralrechnung I–II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[7] Gingyikin, Sz. G., *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, TYPOTEX Kiadó, Budapest, 2003.

[8] Hraskó András, Poncelet tétele, *KöMaL*, 2005/5, 264–275.

[9] Miel, G., Of Calculations Past and Present: The Archimedean Algorithm, *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 17–35.

[10] dr. Pintér Lajos, *Analízis I. (a gimnázium speciális matematika osztályai számára)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[11] Urbán János, *Határérték-számítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[4] A cikk digitalizált változata elérhető a svájci elektronikus akadémiai könyvtár rendszerén, a `http://retro.seals.ch` oldalon.