Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2021. ősz

1. előadás (szeptember 8.)

Az előadás elején a szokásos tudnivalókról ejtettem szót: kezdési időpont, elérhetőségek, számonkérés, tematika. A félév során az analízis alábbi fejezeteit fogjuk tárgyalni: improprius integrál, hatványsorok, az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér, konvergencia $\mathbb{R}^p$-ben, többváltozós függvények folytonossága és határértéke, többváltozós függvények differenciálszámítása. A második félévben a terület precíz fogalmáról (Jordan-mérték), a többváltozós integrálásról, valamint differenciálegyenletekről lesz szó.

Ezután belevágtunk az improprius integrál témakörébe. Egy kis motivációval kezdtem, először visszautaltam a Riemann-integrálra, amelyet korlátos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényekre értelmeztünk. Célunk, hogy ezt a fogalmat kiterjesszük nemkorlátos intervallum vagy nemkorlátos függvény esetére. Két példát néztünk meg, formálisan kiszámoltuk az $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ integrált, valamint az $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ integrált. A formális számolás rögtön előre is vetíti, hogy mi legyen az integrál definíciója, mégpedig korlátos intervallumokon vett integrálok határértéke.

A definíció kimondása előtt célszerűnek láttam a *lokálisan integrálható* függvény fogalmát bevezetni: egy $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $H \subset \mathbb{R}$ tipikusan valamilyen intervallum) lokálisan integrálható a H halmazon, ha bármely $[a,b] \subset H$ korlátos, zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Ha az $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $a \in \mathbb{R}$, de b lehet valós szám vagy $+\infty$) lokálisan integrálható, akkor azt mondjuk, hogy az f-nek az $[a,b)$-n vett *improprius integrálja konvergens*, amennyiben a

$$\lim_{t\to b-0} \int_a^t f$$

határérték létezik és véges. Ekkor az improprius integrált $\int_a^b f$ jelöli, és az értéke a fenti limesz. Hasonlóan értelmezhető az $(a,b]$-n vett improprius integrál konvergenciája. Ha az improprius integrál nem konvergens, akkor divergensnek mondjuk Ha a szóban forgó határérték létezik, de valamelyik végtelen, akkor az improprius integrál divergens, de létezik. Ha a limesz nem létezik, akkor az improprius integrál divergens, és nem is létezik. A jobb átláthatóság kedvéért a konvergens, divergens, létezik és nem létezik elnevezéseket egy „táblázatszerűségbe" foglaltam.

Rögtön megnéztünk egy példát: milyen α valós számra konvergens $\int_0^1 1/x^\alpha\,dx$. Válaszképpen az adódott, hogy pontosan $\alpha < 1$ értékekre (a számolás közben előjött az x^α függvény primitív függvénye és annak bal oldali határértéke a 0-ban. Házi feladat az $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ konvergenciájának vizsgálata.

Ezután megjegyeztük, hogy ha f az $[a,b]$-n Riemann-integrálható, akkor most már $\int_a^b f$ három dolgot is jelent, de ezek szerencsére egybeesnek (ezt az integrálfüggvény folytonosságára hivatkozva indokoltuk).

Az improprius integrál definícióiból maradt még az (a,b) típusú intervallum esete. Ekkor az improprius integrál konvergens, ha van olyan $c \in (a,b)$, hogy $\int_a^c$ és $\int_c^b f$ is konvergensek. Ebben az esetben az iménti két integrál összege legyen $\int_a^b f$. Felmerül, hogy vajon a definíció korrekt-e abban az értelemben, hogy a konvergencia és az érték nem függ a c pont választásától. Szerencsére korrekt, de ezt nem láttam be (aki akarja, meggondolhatja).

Példaképpen kiszámoltuk az $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ integrált a 0-nál való kettébontással (az integrál kiszámolása kapcsán felrajzoltam az arctg függvényt és láttuk a határértékét $+\infty$-ben és $-\infty$-ben).

2. előadás (szeptember 15.)

Az előadás elején emlékeztettem a múlt órán az improprius integrálról tanultakra (definíciók, példák). Ezt követően az improprius integrál és az algebrai műveletek kapcsolatáról mondtam ki egy tételt: ha $\int_a^b f$ és $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b cf$ és $\int_a^b (f+g)$ is konvergens. Azonban (a Riemann-integrállal ellentétben) a szorzatra ez nem igaz: például $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ konvergens, de $\int_0^1 (1/\sqrt{x})^2\,dx$ nem (ezek a korábbi példákból következnek).

Ezután emlékeztettem végtelen sorok abszolút konvergenciájára és a kapcsolatára a konvergenciával (a $\sum(-1)^n/n$ ellenpéldát is felidéztem). Ennek mintájára bevezettük improprius integrálok *abszolút konvergenciájának fogalmát*: az $\int_a^b f$ improprius integrált abszolút konvergensnek nevezzük, ha az $\int_a^b |f|$ improprius integrál konvergens. Tételként (bizonyítás nélkül) kimondtam, hogy az abszolút konvergenciából következik a konvergencia, de visszafele nem, és erre hamarosan lesz példa. De előtte az abszolút konvergencia igazolására egy kritériumot/elvet fogalmazunk meg: *majorizáció és minorizáció*. Tegyük fel, hogy f és g lokálisan integrálható függvények az $[a,b)$ intervallumon (ahol $b \in \mathbb{R}$ és $b = \infty$ is lehet), továbbá van olyan $b_0 \in [a,b)$, hogy minden $x \in [b_0, b)$ esetén $|f(x)| \leq g(x)$. Ekkor

(1) ha $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b f$ konvergens, sőt abszolút konvergens.

(2) Ha pedig $\int_a^b f$ divergens, akkor $\int_a^b g$ is divergens.

Az elvek bizonyítását kihagytam, helyette sokkal érdekesebb alkalmazásokat néztünk. Első példa volt $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergenciája, amelynél az $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ becslést alkalmaztuk ($x \geq 1$ esetén), ahol a majoráló függvény integrálja konvergens $[1,\infty)$-en. Érdekességképpen felírtam a valószínűségszámításból a normális eloszlás kapcsán jól ismert $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ összefüggést. Ezután beláttuk, hogy $\int_1^\infty \sin x/x^2\,dx$ és $\int_1^\infty \cos x/x^2\,dx$ (abszolút) konvergensek. Ezt követően pedig igazoltuk, hogy $\int_1^\infty \sin x/x\,dx$ konvergens (itt parciálisan integráltunk $[0,t]$-n majd t-vel tartottunk a végtelenhez), de $\int_1^\infty |\sin x/x|\,dx$ nem konvergens (itt a $|\sin x| \geq \sin^2 x$ alsó becslést használtuk). Érdekességképpen megjegyeztem, hogy $\int_0^\infty \sin x/x\,dx = \pi/2$. Végül további érdekességként a gamma függvényt értelmeztem: $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$. Belátható, hogy $\Gamma(\alpha)$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 0$. Ekkor $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, így pozitív egész n esetén $\Gamma(n) = (n-1)!$. A gamma függvény tehát a faktoriális kiterjesztéseként is felfogható, és ekkor meglepő módon kiszámolható, hogy $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$.

Az improprius integrálok témakörét a sorokkal való kapcsolattal zártuk. Kimondtam a sorok konvergenciájára vonatkozó *integrálkritériumot*: ha $f\colon [N,\infty) \to [0,\infty)$ monoton csökkenő függvény (ahol N pozitív egész), akkor a $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ végtelen (szám- vagy numerikus) sor pontosan akkor konvergens, ha az $\int_N^\infty f$ improprius integrál konvergens. A bizonyítás előtt rögtön egy példát néztünk, mégpedig az $f(x) = 1/x^\alpha$ függvényt $\alpha \geq 0$ esetén. Ekkor teljesülnek az integrálkritérium feltételei, így a $\sum_{n=1}^\infty 1/n^\alpha$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens $\alpha \geq 0$ esetén, ha az $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ improprius integrál konvergens, vagyis (a múlt óra alapján) $\alpha > 1$. Az $\alpha < 0$ esetben a sor nem lehet konvergens, hiszen $1/n^\alpha \not\to 0$, tehát végeredményben a hiperharmonikus sor pontosan $\alpha > 1$ esetén konvergens.

Az integrálkritérium bizonyítását két rajz segítségével bizonyítottuk: a rajzok két fontos becslést szemléltettek. A bizonyítás végét már csak szóban mondtam el, a következő óráén visszatérünk rá.