Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2021. ősz

1. előadás (szeptember 8.)

Az előadás elején a szokásos tudnivalókról ejtettem szót: kezdési időpont, elérhetőségek, számonkérés, tematika. A félév során az analízis alábbi fejezeteit fogjuk tárgyalni: improprius integrál, hatványsorok, az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér, konvergencia $\mathbb{R}^p$-ben, többváltozós függvények folytonossága és határértéke, többváltozós függvények differenciálszámítása. A második félévben a terület precíz fogalmáról (Jordan-mérték), a többváltozós integrálásról, valamint differenciálegyenletekről lesz szó.

Ezután belevágtunk az improprius integrál témakörébe. Egy kis motivációval kezdtem, először visszautaltam a Riemann-integrálra, amelyet korlátos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényekre értelmeztünk. Célunk, hogy ezt a fogalmat kiterjesszük nemkorlátos intervallum vagy nemkorlátos függvény esetére. Két példát néztünk meg, formálisan kiszámoltuk az $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ integrált, valamint az $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ integrált. A formális számolás rögtön előre is vetíti, hogy mi legyen az integrál definíciója, mégpedig korlátos intervallumokon vett integrálok határértéke.

A definíció kimondása előtt célszerűnek láttam a *lokálisan integrálható* függvény fogalmát bevezetni: egy $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $H \subset \mathbb{R}$ tipikusan valamilyen intervallum) lokálisan integrálható a H halmazon, ha bármely $[a,b] \subset H$ korlátos, zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Ha az $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $a \in \mathbb{R}$, de b lehet valós szám vagy $+\infty$) lokálisan integrálható, akkor azt mondjuk, hogy az f-nek az $[a,b)$-n vett *improprius integrálja konvergens*, amennyiben a

$$\lim_{t \to b-0} \int_a^t f$$

határérték létezik és véges. Ekkor az improprius integrált $\int_a^b f$ jelöli, és az értéke a fenti limesz. Hasonlóan értelmezhető az $(a,b]$-n vett improprius integrál konvergenciája. Ha az improprius integrál nem konvergens, akkor divergensnek mondjuk Ha a szóban forgó határérték létezik, de valamelyik végtelen, akkor az improprius integrál divergens, de létezik. Ha a limesz nem létezik, akkor az improprius integrál divergens, és nem is létezik. A jobb átláthatóság kedvéért a konvergens, divergens, létezik és nem létezik elnevezéseket egy „táblázatszerűségbe” foglaltam.

Rögtön megnéztünk egy példát: milyen α valós számra konvergens $\int_0^1 1/x^\alpha\,dx$. Válaszképpen az adódott, hogy pontosan $\alpha < 1$ értékekre (a számolás közben előjött az x^α függvény primitív függvénye és annak bal oldali határértéke a 0-ban. Házi feladat az $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ konvergenciájának vizsgálata.

Ezután megjegyeztük, hogy ha f az $[a,b]$-n Riemann-integrálható, akkor most már $\int_a^b f$ három dolgot is jelent, de ezek szerencsére egybeesnek (ezt az integrálfüggvény folytonosságára hivatkozva indokoltuk).

Az improprius integrál definícióiból maradt még az (a,b) típusú intervallum esete. Ekkor az improprius integrál konvergens, ha van olyan $c \in (a,b)$, hogy $\int_a^c$ és $\int_c^b f$ is konvergensek. Ebben az esetben az iménti két integrál összege legyen $\int_a^b f$. Felmerül, hogy vajon a definíció korrekt-e abban az értelemben, hogy a konvergencia és az érték nem függ a c pont választásától. Szerencsére korrekt, de ezt nem láttam be (aki akarja, meggondolhatja).

Példaképpen kiszámoltuk az $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ integrált a 0-nál való kettébontással (az integrál kiszámolása kapcsán felrajzoltam az arctg függvényt és láttuk a határértékét $+\infty$-ben és $-\infty$-ben).

2. előadás (szeptember 15.)

Az előadás elején emlékeztettem a múlt órán az improprius integrálról tanultakra (definíciók, példák). Ezt követően az improprius integrál és az algebrai műveletek kapcsolatáról mondtam ki egy tételt: ha $\int_a^b f$ és $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b cf$ és $\int_a^b (f+g)$ is konvergens. Azonban (a Riemann-integrállal ellentétben) a szorzatra ez nem igaz: például $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ konvergens, de $\int_0^1 (1/\sqrt{x})^2\,dx$ nem (ezek a korábbi példákból következnek).

Ezután emlékeztettem végtelen sorok abszolút konvergenciájára és a kapcsolatára a konvergenciával (a $\sum(-1)^n/n$ ellenpéldát is felidéztem). Ennek mintájára bevezettük improprius integrálok *abszolút konvergenciájának fogalmát*: az $\int_a^b f$ improprius integrált abszolút konvergensnek nevezzük, ha az $\int_a^b |f|$ improprius integrál konvergens. Tételként (bizonyítás nélkül) kimondtam, hogy az abszolút konvergenciából következik a konvergencia, de visszafele nem, és erre hamarosan lesz példa. De előtte az abszolút konvergencia igazolására egy kritériumot/elvet fogalmazunk meg: *majorizáció és minorizáció*. Tegyük fel, hogy f és g lokálisan integrálható függvények az $[a,b)$ intervallumon (ahol $b \in \mathbb{R}$ és $b=\infty$ is lehet), továbbá van olyan $b_0 \in [a,b)$, hogy minden $x \in [b_0,b)$ esetén $|f(x)| \le g(x)$. Ekkor

(1) ha $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b f$ konvergens, sőt abszolút konvergens.

(2) Ha pedig $\int_a^b f$ divergens, akkor $\int_a^b g$ is divergens.

Az elvek bizonyítását kihagytam, helyette sokkal érdekesebb alkalmazásokat néztünk. Első példa volt $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergenciája, amelynél az $e^{-x^2} \le e^{-x}$ becslést alkalmaztuk ($x \ge 1$ esetén), ahol a majoráló függvény integrálja konvergens $[1,\infty)$-en. Érdekességképpen felírtam a valószínűségszámításból a normális eloszlás kapcsán jól ismert $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ összefüggést. Ezután beláttuk, hogy $\int_1^\infty \sin x/x^2\,dx$ és $\int_1^\infty \cos x/x^2\,dx$ (abszolút) konvergensek. Ezt követően pedig igazoltuk, hogy $\int_1^\infty \sin x/x\,dx$ konvergens (itt parciálisan integráltunk $[0,t]$-n majd t-vel tartottunk a végtelenhez), de $\int_1^\infty |\sin x/x|\,dx$ nem konvergens (itt a $|\sin x| \ge \sin^2 x$ alsó becslést használtuk). Érdekességképpen megjegyeztem, hogy $\int_0^\infty \sin x/x\,dx = \pi/2$. Végül további érdekességként a gamma függvényt értelmeztem: $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$. Belátható, hogy $\Gamma(\alpha)$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 0$. Ekkor $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, így pozitív egész n esetén $\Gamma(n) = (n-1)!$. A gamma függvény tehát a faktoriális kiterjesztéseként is felfogható, és ekkor meglepő módon kiszámolható, hogy $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$.

Az improprius integrálok témakörét a sorokkal való kapcsolattal zártuk. Kimondtam a sorok konvergenciájára vonatkozó *integrálkritériumot*: ha $f\colon [N,\infty) \to [0,\infty)$ monoton csökkenő függvény (ahol N pozitív egész), akkor a $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ végtelen (szám- vagy numerikus) sor pontosan akkor konvergens, ha az $\int_N^\infty f$ improprius integrál konvergens. A bizonyítás előtt rögtön egy példát néztünk, mégpedig az $f(x) = 1/x^\alpha$ függvényt $\alpha \ge 0$ esetén. Ekkor teljesülnek az integrálkritérium feltételei, így a $\sum_{n=1}^\infty 1/n^\alpha$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens $\alpha \ge 0$ esetén, ha az $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ improprius integrál konvergens, vagyis (a múlt óra alapján) $\alpha > 1$. Az $\alpha < 0$ esetben a sor nem lehet konvergens, hiszen $1/n^\alpha \not\to 0$, tehát végeredményben a hiperharmonikus sor pontosan $\alpha > 1$ esetén konvergens.

Az integrálkritérium bizonyítását két rajz segítségével bizonyítottuk: a rajzok két fontos becslést szemléltettek. A bizonyítás végét már csak szóban mondtam el, a következő óráén visszatérünk rá.

3. előadás (szeptember 22.)

Az előadás elején visszatértem a múlt órán félbehagyott bizonyításra, és felírtam újra a kapott becslést, majd röviden megindokoltuk, hogy ebből hogyan következik az integrálkritérium állítása.

Ezt követően a Taylor-sorok témakörét ismételtük át, és emlékeztettem néhány fontos ismeretre. Ha az f függvény akárhányszor deriválható az x_0 pontban, akkor ehhez a ponthoz tartozó *Taylor-sora* $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)/n!(x-x_0)^n$. Szerepelt korábban egy elégséges feltétel a Taylor-sornak egy I intervallumon való konvergenciájára: ha van olyan K valós szám, hogy minden n nemnegatív egész és $x \in I$ esetén $|f^{(n)}(x)| \leq K$, akkor tetszőleges $x_0 \in I$ ponthoz tartozó Taylor-sor minden $x \in I$ pontban konvergens és összege $f(x)$, más szóval *a Taylor-sor előállítja f-et.* Példaképpen felírtam három (a 0 ponthoz tartozó) nevezetes Taylor-sort:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Mindezek után belekezdtünk a hatványsorok témakörbe. A Taylor-sort általánosítjuk most, és vizsgáljuk a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ alakú sorokat. A következő három kérdést vetettük fel: 1) milyen x-re konvergens a sor? 2) mi az összegfüggvénye? 3) milyen simasági tulajdonságokkal rendelkezik az összegfüggvény? Az órán ezekre adunk válaszokat.

Ha (a_n) tetszőleges számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sort x_0 *középpontú hatványsornak* nevezzük. Azon x-ek halmaza, amelyre a hatványsor kovergens, a hatványsor *konvergenciatartománya* vagy *konvergenciahalmaza* (házi jelölés: KH). Rögtön észrevettük, hogy az $x = x_0$ minden esetben eleme a konvergenciahalmaznak, tehát KH sosem üres. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ függvény, ahol $x \in$ KH, a hatványsor *összegfüggvénye.*

Első példaként a mértani sorra emlékeztettem: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, és ekkor az összege $1/(1-x)$. A mértani sor konvergenciahalmaza tehát a $(-1,1)$ intervallum és összegfüggvénye az $1/(1-x)$ függvény, amely (akárhányszor) differenciálható.

Második példánk a $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ hatványsor volt, csak a konvergenciahalmazt vizsgáltuk. Ehhez felidéztem a (szám)sorok konvergenciájára és divergenciájára vonatkozó gyök- és hányadoskritériumokat. A gyökkritérium alkalmazásával beláttuk, hogy a szóban forgó hatványsorra KH $= [-1,1)$ (a végpontban a Leibniz-kritériumra is szükségünk volt). Bár ez a két példa igen kevés, de mégis azt a sejtést fogalmaztuk meg, hogy egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza a középpontra „majdnem szimmetrikus”. Bizonyítás nélkül megfogalmaztam, hogy ez valóban igaz: bármely hatványsor esetén létezik olyan R nemnegatív szám vagy $R = infty$, hogy a hatványsor konvergenciahalmaz a következő négy intervallum valamelyike: (x_0-R, x_0+R), $[x_0-R, x_0+R)$, $(x_0-R, x_0+R]$, $[x_0-R, x_+R]$. Az R-et a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük, és megbeszéltük az $R = 0$, $R = \infty$ speciális eseteket.

Kérdésként felmerül, hogy vajon az R konvergenciasugár megadható-e képlettel? Erre vonatkozik a híres Cauchy–Hadamard-tétel: ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsorra létezik $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor ennek a limesznek a reciproka éppen a konvergenciasugár (itt fontos megjegyezni, hogy $1/(0+0) = +\infty$ és $1/(+\infty) = 0$). A tételt nem bizonyítottam, helyette egy hasznosnak vélt megjegyzést tettem, amely arra vonatkozott, hogy a Cauchy–Hadamard-tétel alkalmazása nemtriviális határértékekhez vezethet, mint ahogy az exponenciális függvény esetében:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ limeszre lenne szükségünk, amely ugyan még viszonylag egyszerűen meghatározható ($+\infty$). Ám ha még becsempészünk egy n^n szorzót is, akkor a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n/n!}$ határértékre volna szükség, amely messze nem triviális. Ennek kapcsán érdekességképpen megemlítettem a (bámulatos!) Stirling-formulát: $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$. Ebből könnyen adódik, hogy a szóban forgó limesz éppen e. Mindezek mutatják, hogy nem igazán érdemes a Cauchy–Hadamard-tétellel bajlódni, hanem inkább a hányadoskritériummal próbáljunk konvergenciahalmazt számolni (gyakorlaton sok példa lesz erre).

4. előadás (szeptember 29.)

Az előadás elején hatványsor összegfüggvényének tulajdonságaival kezdtünk foglalkozni. Bizonyítás nélkül kimondtam, hogy a pozitív konvergenciasugarú $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor a konvergenciahalmazon folytonos, az esetleges végpontokban féloldalról folytonos (ezt Abel folytonossági tételeként emlegettem); továbbá a konvergenciahalmaz belsejében, azaz $(-R,R)$-en differenciálható, sőt a deriválás tagonként elvégezhető:

$$(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots)' = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots.$$

Valamint a hatványsor tagonként is integrálható, azaz a primitív függvényeinek alakja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Következményként megfogalmaztuk, hogy a pozitív konvergenciasugarú $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor x_0 középpontú Taylor-sora az eredeti hatványsor. A bizonyítás a tagonkénti differenciálhatóságot használta, amelynek segítségével kaptuk, hogy az f összegfüggvényre $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

Még egy következmény szerepelt, mégpedig a hatványsor egyértelműségi tétel: ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ az x_0 valamely környezetében (tehát valamely $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ halmazon, ahol $\varepsilon > 0$ szám), akkor szükségképpen $a_n = b_n$ minden n-re, hiszen mindkettő éppen $f^{(n)}(x_0)/n!$, ahol f az összegfüggvény.

Ezt követően szép alkalmazásokkal zártuk a hatványsorok témakörét. Először két hatványsort írtunk fel. A $\log(1+x)$ függvénnyel kezdtük. Ehhez a deriváltját fejtettük hatványsorba (méghozzá $-x$ hányadosú mértani sorba), és ebből integrálással, majd $x=0$ helyettesítéssel kaptuk, hogy $|x|<1$ esetén

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{1}$$

Végül itt $x=1$ helyettesítéssel éltünk és így

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

Mindez azért jogos, mert a hatványsor $x=1$-ben konvergens (Leibniz), így alkalmazható Abel folytonossági tétele, ezért az (1) azonosság folytonosan kiterjed az $x=1$ pontra is. Megjegyeztem, hogy a fenti két sorral már az egyváltozós analízis második félévében is találkoztunk, és legalább kétféleképpen kihoztuk mindkettőt (a félév elején és a félév végén).

Ezután az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény 0 körüli hatványsor előállítását írtuk fel, annak felhasználásával, hogy $\operatorname{arc\,tg}' x = 1/(1+x^2)$, ami $-x^2$ hányadosú mértani sorba fejthető $|x|<1$ esetén. Ebből integrálással (és $x=0$ helyettesítés után) kaptuk, hogy $|x|<1$ esetén

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots.$$

Ebben $x \to 1-0$ mellett elvégezhető a határátmenet, mert a bal oldal folytonos függvény, a jobb oldal pedig konvergens az $x=1$ pontban (hiszen itt Leibniz-típusú), így az Abel-féle folytonossági tétel alkalmazható a jobb oldalra. Mindezek alapján a tetszetős

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

előállítást nyerjük (amely egyébként nagyon lassan konvergál, a π-t nem érdemes ezzel közelítőleg számolni).

Végül a hatványsorok utolsó alkalmazásaként egy kombinatorikai jellegű feladatot oldottunk meg, mégpedig explicit képletet adtunk a Fibonacci-sorozatra. A sorozat rekurzív értelmezése: $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ és $n \geq 1$ esetén $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Tekintettük az úgynevezett generátorfüggvényt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Az (indukcióval rögtön adódó) $|u_n| \leq 2^n$ becslés segítségével meggondolható, hogy a sor $|x| < 1/2$ esetén konvergens (valójában bővebb halmazon is), így alkalmazható majd az egyértelműségi tétel. A rekurzió felhasználásával kaptuk, hogy

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}.$$

Ezt a függvényt két mértani sor összegeként írtuk, majd hatványsorba fejtettük, és az egyértelműségi tételből kaptuk, hogy

$$u_n = \frac{1}{q_1 - q_2}\left(\frac{1}{q_1^n} - \frac{1}{q_2^n}\right),$$

ahol q_1 a pozitív, q_2 a negatív gyöke az $x^2 + x - 1$ polinomnak. Az explicit formulában felbukkan az aranymetszés arányszáma, ez szemet gyönyörködtető.

Mindezek után ténylegesen belekezdtünk a többváltozós analízisbe. Első témakörünk az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér. Motivációként a számegyenest hoztam fel, az ottani abszolút érték fogalmával. Ennek mintájára $\mathbb{R}^p$ a rendezett valós szám p-esek halmaza. Értelmeztük az összeadás és valós számmal való szorzást, az abszolút értéket, a skalárszorzatot. Az abszolút értéknek két egyszerű tulajdonsága: $|cx| = |c| \cdot |x|$ bármely c valós számra, továbbá $|x| \leq |x_1| + \cdots + |x_p|$ (ez négyzetre emeléssel igazolható, mindkettőt házinak adtam).

5. előadás (október 6.)

Az előadás elején folytattuk az $\mathbb{R}^p$ tér tanulmányozását két fontos egyenlőtlenség tárgyalásával. Az egyik a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség: $|\langle x, y\rangle| \le |x| \cdot |y|$. A bizonyítás egy másodfokú polinom diszkriminánsának vizsgálatából adódott. Megjegyeztem, hogy ha tudjuk azt, hogy $\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi$, ahol φ az x és y vektorok közbezárt szöge, akkor az egyenlőtlenség szinte nyilvánvaló. A CBS-egyenlőtlenség egyszerű következménye az $y = (1, \ldots, 1)$ szereposztással a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség (amelyet a bevezető analízis második félévének végén az x^2 függvény konvexitására támaszkodva már igazoltunk):

$$\frac{x_1 + \ldots + x_p}{p} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_p^2}{p}}.$$

Hátra volt még az abszolút értékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség: $|x + y| \le |x| + |y|$. Ezt négyzetre emeléssel és a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségre való visszavezetéssel igazoltuk. Egy rajzon illusztráltam, hogy mi köze az egyenlőtlenségnek a geometriából ismert háromszög-egyenlőtlenséghez (egy háromszögben bármely két oldal hosszának összege legalább akkora, mint a harmadik oldal hossza). A távolság témakörét lezárandó, meséltem picit az általánosítási lehetőségekről, többek között a Manhattan-távolságról és metrikákról. Ezekkel nem foglalkozunk (bár szakköri téma lehetne középiskolában).

Ezt követően az $\mathbb{R}^p$-beli határérték témakörére tértünk át. Mindenekelőtt a különféle gömböket értelmeztük $\mathbb{R}^p$-ben. Szerepelt $B(a, r)$ (a középpontú r sugarú nyílt gömb), $\overline{B(a, r)}$ (zárt gömb), $\dot{B}(a, r)$ (kipontozott gömb) és $\partial B(a, r)$ (gömbfelület).

Felelevenítettem a valós számsorozatok konvergenciájának fogalmát, majd megbeszéltük, hogy miként általánosíthatjuk p dimenzióra. Formálisan ugyanaz, mint egy változóban: az (a_n) pontsorozat határértéke $A \in \mathbb{R}^p$ (jel: $a_n \to A$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$), ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Itt N a küszöbszám, amely nem kell, hogy egész legyen. Az $|a_n - A| < \varepsilon$ összefüggés úgy is írható, hogy $a_n \in B(A, \varepsilon)$. Ha van határérték, akkor a pontsorozat konvergens, különben divergens. Vigyázat, végtelen határérték pontsorozatok esetében nincs (nem is lenne értelme)!

Egy megjegyzésben utaltam arra, hogy a konvergencia ekvivalens definíciója (az egydimenziós eset mintájára) az, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az (a_n) pontsorozatnak csak véges sok tagja van a $B(A, \varepsilon)$ gömbön kívül.

Ezután a korlátosság és konvergencia kapcsolatáról beszéltünk. Egy (a_n) pontsorozatot korlátosnak neveztem, ha van olyan K valós szám, hogy minden n-re $|a_n| \le K$, más szóval belefoglalható egy $(0, \ldots, 0)$ középpontú gömbbe, pontosabban létezik $\overline{B(0, K)}$ gömb, amely tartalmazza a sorozat összes tagját. Kimondtam, hogy konvergens sorozat korlátos, de ez visszafele nem igaz. A visszafele irányra $p = 2$ esetben az $a_n = ((-1)^n, 0)$ sorozatot adtuk.

Tételként kimondtam és be is láttam, hogy $a_n \to A$ pontosan akkor, ha koordinátánként teljesül a konvergencia, azaz $a_{n,j} \to A_i$ minden $j = 1, \ldots, p$ esetén, ahol $(a_{n,j})$ az j-edik koordinátasorozatot jelöli.

Kimondtam állításként a határérték és műveletek kapcsolatát: ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$, $ca_n \to cA$ (ahol c tetszőleges valós szám) és $\langle a_n, b_n\rangle \to \langle A, B\rangle$. Az összeg esetét igazoltam, a többit gyakorlatra hagytam, egyébként a koordinátasorozatokra kell visszavezetni.

Ezzel befejeztük ezt a témát, és egy másikat kezdtünk, a ponthalmazelméletet. Célunk, hogy az $\mathbb{R}^p$ pontjait osztályozzuk valamely halmazra vonatkozó tulajdonságaik alapján. Egy kis rajzolgatás után egyből megfogalmaztam néhány definíciót.

Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz belső, külső és határpontjainak fogalma: x belső pont, ha van olyan gömb körülötte, amely része H-nak (formálisan $\exists r > 0 : B(x, r) \subset H$); x külső pont, ha körülötte egy egész gömb része H komplementerének (formálisan $\exists r > 0 : B(x, r) \subset (\mathbb{R}^p \setminus H)$); x határpont, ha az x körüli bármely gömbben van H-beli és nem H-beli (formálisan $\forall r > 0 : B(x, r) \cap H \neq \emptyset$ és $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^p \setminus H) \neq \emptyset$). A belső, külső és határpontok halmaza rendre a H belseje, külseje és határa ($\operatorname{int} H, \operatorname{ext} H, \partial H$).

6. előadás (október 13.)

Az óra elején emlékeztettem arra, mi volt egy héttel ezelőtt: belső, külső és határpont fogalma, valamint halmaz belseje, külseje és határa.

Rögtön megjegyeztük, hogy belső pont mindenképpen eleme H-nak, külső pedig nem eleme, valamint határpont lehet eleme az adott halmaznak, de nem eleme is (ezt nemsokára láttuk egy példán). Példaképpen először egy dimenzióban az $[a, b)$ intervallum pontjait néztük meg (ennek az egyik határpontja eleme a halmaznak, a másik nem), majd a racionális számok halmazát, valamint az üreshalmazt és az $\mathbb{R}^p$ teret. Általános érvényű állításként megfogalmaztuk a belső, külső és határpontok halmaza diszjunkt, és az uniójuk kiadja az egész $\mathbb{R}^p$ teret (a bizonyítás a definícióból adódik).

Ezután a torlódási pont és az izolált pont fogalmát vezettük be. A H halmaz torlódási pontjának tetszőleges környezetében végtelen sok elem van az adott halmazból (formálisan $\forall r > 0 : B(x, r) \cap H$ végtelen sok elemű). A torlódási pontok halmazát szokás H'-vel jelölni. Példaképpen megnéztük egy dimenzióban a racionális számok halmazát, amelyre $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, továbbá a $H = [0, 1) \cup \{2\}$ halmazt, amelyre $H' = [0, 1]$. Ez a példa motiválta az izolált pont fogalmát. Izolált pontnak van olyan környezete, amelyben az az egyetlen halmazbeli pont (formálisan $\exists r > 0 : B(x, r) \cap H = \{x\}$). Az izolált pont a definícióból adódóan eleme a halmaznak, torlódási pont lehet eleme vagy nem eleme is (például a racionális számok esetében minden valós szám torlódási pont).

Megfogalmaztam (bizonyítás nélkül) a torlódási pont két ekvivalens karakterizációját: bármely környezetében legalább két H-beli elem van; található olyan (x_n) sorozat, amely $H \setminus \{x\}$-ben halad és a határértéke az adott pont.

Rátértünk a nyílt és zárt halmazok témakörére. Nyíltnak neveztem egy halmazt, ha minden pontja belső pont, más szóval megegyezik a belsejével. Zárt egy halmaz, ha a komplementere ($\mathbb{R}^p$-re nézve) nyílt. Rögtön megjegyeztem, hogy „A halmaz nem ajtó.” Egy halmaz lehet se nem nyílt, se nem zárt, például a számegyenesen az $[a, b)$ intervallum ilyen. Sőt, egy halmaz lehet egyszerre nyílt és zárt is, például $\emptyset$ és $\mathbb{R}^p$ ilyenek (van-e más?).

Egy fontos tulajdonsága a nyílt halmazoknak, hogy véges sok metszete nyílt, tetszőlegesen sok (véges vagy végtelen) uniója nyílt. Ezt be is bizonyítottuk. Majd következményként megfogalmaztuk a párját zárt halmazokra: véges sok zárt uniója zárt, tetszőlegesen sok zárt metszete zárt. Ennek bizonyítása a zártság definícióját, a de Morgan-azonosságokat és a nyíltakra vonatkozó eredményt használja (házinak adtam a végiggondolást).

A témát a zárt halmazok ekvivalens jellemzésével zártam: $H \subset \mathbb{R}^p$ pontosan akkor zárt, ha bármely, H-ban haladó konvergens sorozatnak a határértéke is H-ban van (tehát „nem lehet kikonvergálni” a halmazból).

Ezzel be is fejeztük a ponthalmazelméletet. Ezután rátértünk a többváltozós függvényekre. Ezentúl olyan f függvényekkel foglalkozunk, amelyekre $D(f) \subset \mathbb{R}^p$ (ahol $p \geq 2$ egész szám), és $R(f) \subset \mathbb{R}$ (tehát f valós értékű). Felírtunk néhány példát ilyen függvényekre. Megbeszéltük, hogy egy ilyen típusú függvény grafikonja egy $\mathbb{R}^{p+1}$-beli halmaz $\operatorname{graph} f := \{(x_1, \ldots, x_p, f(x_1, \ldots, x_p)) : (x_1, \ldots x_p) \in D(f)\}$. Ha $p = 2$, akkor ez egy felület a háromdimenziós térben. A következő órán a grafikonok szemléltetésének lehetőségeivel folytatjuk.