Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2020. tavasz

4. előadás (március 5.)

Az órán a Jordan-mérték témakörének tárgyalását kezdtük el. Először egy kis motivációval indítottam. Feltettem azt a kérdést, hogy vajon a terület/térfogat fogalma (amiről mindenkinek van egy intuitív elképzelése) mit jelent? Van-e minden síkidomnak területe? Megbeszéltük, hogy a terület matematikailag valójában egy függvény (lesz), amely a területtel rendelkező síkidomokhoz egy valós számot rendel. Összeszedtük, hogy milyen tulajdonságokat várunk el ettől a t-vel jelölt függvénytől (ez egyelőre csak motiváció, még nem definiáltam semmit):

1. nemnegatív: $t \geq 0$;
2. additív: ha A és B egymásba nem nyúlóak (és van területük), akkor $t(A \cup B) = t(A) + t(B)$;
3. egybevágóságra nézve invariáns, sőt megelégszünk majd az eltolásra nézve invarianciával, azaz $t(A + v) = t(A)$, ahol v az eltolás vektora;
4. normált: $t([0,1] \times [0,1]) = 1$.

Ezek után még röviden előrevetítettem a belső és külső terület fogalmát: előbbit beírt téglákkal, utóbbit téglafedésekkel fogjuk értelmezni.

A definíciók előtt célszerű volt felidézni, hogy milyen fogalmak fognak lépten-nyomon felbukkanni a ponthalmazelméletből: halmaz belső, külső és határpontja, halmaz belseje, külseje és határa. Egy új fogalomként a *halmaz lezártját* (angolul closure) értelmeztük: $\operatorname{cl} H := \operatorname{int} H \cup \partial H$ (ami egyébként ugyanaz, mint $H \cup \partial H$). Megjegyeztem (bizonyítás nélkül), hogy a lezárt valójában a H halmazt tartalmazó zárt halmazok közül a legszűkebb (másképpen fogalmazva: a H halmazt tartalmazó zárt halmazok metszete). Definiáltuk még a *(tengelypárhuzamos) téglát*, amely $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ alakú halmaz, ahol minden j-re $a_j < b_j$ valós számok (a kétdimenziós esetet – téglalap – fel is rajzoltam). Végül az egymásba nem nyúló halmazokat értelmeztem: A és B *egymásba nem nyúlóak* (házi rövidítés lesz: e.n.ny.), ha nincs közös belső pontjuk, azaz $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \emptyset$. Itt rögtön felhívtam (egy rajzon) a figyelmet a diszjunkt és az egymásba nem nyúló fogalmak közötti lényeges különbségre.

Ennyi előkészület után rátértünk a Jordan-féle terület bevezetésére. Rögtön azzal kezdtem, hogy csakis korlátos halmazokkal foglalkozunk, és a korlátossság a definícióját is felidéztem: a halmaz lefedhető gömbbel. Emellé mondtam egy ekvivalens megfogalmazást: a halmaz lefedhető téglával (az ekvivalenciát gyakorlaton megnézzük).

Ezek után elkezdtük értelmezni a belső és külső terület fogalmait. Ha $T = [a, b] \times [c, d]$ tégla, akkor $t(T) := (b - a)(d - c)$ (ez egyelőre egy szám, de a fejünkben ez a tégla „elvárt” területe, később be is látjuk, hogy az). Ha pedig H tetszőleges korlátos halmaz a síkon, akkor H *külső területe* legyen

$$k(H) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{k} t(T_j) : T_j \text{ tégla minden } j\text{-re, amelyekre } H \subset \bigcup_{j=1}^{k} T_j \right\}.$$

Rögtön megnéztük, hogy a halmaz, amelynek infimumát vesszük nem üres (H korlátos, így téglával lefedhető) és alulról korlátos (a 0 egy alsó korlát), tehát $k(H)$ nemnegatív valós szám.

A H halmaz *belső területe* pedig legyen

$$b(H) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} t(T_j) : T_j \text{ tégla minden } j\text{-re, amelyek egymásba nem nyúlóak és } \bigcup_{j=1}^{k} T_j \subset H \right\},$$

ha H-ba írható tégla (más szóval tartalmaz téglát), és $b(H) := 0$, amennyiben H-ba nem írható tégla (más szóval nem tartalmaz téglát). Megjegyeztem, hogy H pontosan akkor nem tartalmaz téglát, ha H belseje üres, ezt majd gyakorlaton megnézzük. Ezenkívül egyelőre nem világos, hogy nem lehet-e végtelen $b(H)$, de hamarosan ki fog derülni. Példaképpen még a tégla példáját néztük meg, és láttuk, hogy $b(T) \geq t(T)$ és $k(T) \leq t(T)$. Tehát ha tudnánk, hogy $b(T) \leq k(T)$, akkor ebből az következne, amit szeretnénk, hogy $b(T) = k(T) = t(T)$ (azaz tégla belső és külső területe megegyezik, méghozzá az elvárt érték, az oldalak hosszainak szorzata).

Fő célunk innentől az volt, hogy tetszőleges korlátos $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazra megmutassuk: $b(H) \leq k(H)$. E cél felé haladva bevezettük a *négyzetrács* fogalmát a síkon:

$$\mathcal{K}_n := \left\{ \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] : i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A négyzetrács elemeire *„kis négyzetek”*-ként (vagy elemi kis négyzetekként) fogok hivatkozni. Adott korlátos H halmaz és $\mathcal{K}_n$ négyzetrács esetén egy $K \in \mathcal{K}_n$ négyzet a H-nak *belső négyzete*, ha $K \subset \operatorname{int} H$; *külső négyzete*, ha $K \subset \operatorname{ext} H$; és *határnégyzete*, ha nem belső és nem külső négyzet, ami ekvivalens azzal, hogy $K \cap \partial H \neq \emptyset$ (ezt nem igazoltam, elég, ha elhisszük). Mindezeket a négyzeteket egy konkrét rajzon színesekkel is illusztráltuk. Ezt követően bevezettünk két mennyiséget (ahol az abszolút érték a halmaz elemszámát jelöli):

$$b_n(H) := \frac{|\{K \in \mathcal{K}_n : K \text{ belső négyzete } H\text{-nak}\}|}{n^2},$$

(ami a fejünkben szemléletesen a H belső négyzeteinek területösszege, de egyelőre még nincs terület), és

$$k_n(H) := \frac{|\{K \in \mathcal{K}_n : K \text{ belső vagy határnégyzete } H\text{-nak}|}{n^2}$$

(ami a fejünkben szemléletesen H belső és határnégyzeteinek területösszege). Itt bizonyítás nélkül megjegyeztem, hogy K pontosan akkor belső vagy határnégyzet, ha $K \cap \operatorname{cl} H \neq \emptyset$.

Ezek után az óra (és voltaképpen az elmélet ezen felépítésének egyik) *fő tétele* a következő volt (bizonyítás nélkül): ha T tégla, akkor $n \to \infty$ esetén $b_n(T) \to t(T)$ és $k_n(T) \to t(T)$; ha pedig H tetszőleges korlátos halmaz, akkor $b_n(H) \to b(H)$ és $k_n(H) \to k(H)$.

Mivel definíció alapján nyilvánvaló, hogy $0 \leq b_n(H) \leq k_n(H)$, így határátmenettel megkaptuk a már előrevetített $0 \leq b(H) \leq k(H)$ összefüggést. Ez alapján az óra végén bevezettük a Jordan-mérhetőség fogalmát: a H korlátos halmaz *mérhető*, ha $b(H) = k(H)$, és ekkor ez a közös érték a H halmaz *területe* (Jordan-mértéke), jele $t(H)$. Első példaként a $T = [a, b] \times [c, d]$ téglát említettük, amelyről a korábbiakban már megelőlegezett módon láttuk, hogy $b(T) = k(T) = t(T) = (b-a)(d-c)$, tehát minden tégla mérhető.

Végül egy nem mérhető halmaz példájával zártuk. Azt állítottam, hogy a

$$H = \{(x, y) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq 1\}$$

„racionális fésű” nem Jordan-mérhető. Ehhez még felírtam, hogy $b(H) = 0$ és $k(H)$, továbbá $\operatorname{int} H = \emptyset$ és $\operatorname{cl} H = [0, 1] \times [0, 1]$ (ilyen példák a múlt félévben szerepeltek a ponthalmazelmélet témakörben). Itt hagytuk abba, gyakorlaton majd megszámoljuk a belső és határnégyzeteket és elvégezzük az $n \to \infty$ határátmenetet.