Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2020. tavasz

3. előadás (február 27.)

Az óra legelején megkérdeztem, hogy ki számolta ki a kis hangya és a gonosz manó feladatából kapott differenciálegyenlet megoldását. Mivel meglehetősen kevesen, ezért ez maradt házi, de a vizsgán természetesen tudni kell, hiszen lineáris egyenletről lévén szó, a megoldási módszer mindenki számára ismert és gyakorlaton is szerepelt.

Röviden felelevenítettem, hogy másodrendű lineáris egyenletekkel kezdtünk foglalkozni a múlt óra végén. Az általános alakjuk: $y'' + py' + qy = r$, ahol $p, q, r\colon I \to \mathbb{R}$ adott függvények (I intervallum), és keresendő az $y\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. De mi csak nagyon speciális esetet nézünk: $p = a$, $q = b$ konstansok (az egyenlet állandó együtthatós) és $r = 0$ (homogén egyenlet). Megemlítettem, hogy az inhomogén egyenletnek például próbafüggvénnyel kereshetünk megoldását (ha a jobb oldal eléggé speciális alakú, mert különben nehéz próbálkozni), és végül a feladat linearitása miatt az inhomogén egyenlet összes megoldása $y = y_h + y_p$ alakban áll elő, ahol y_h a homogén egyenlet összes megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris (vagyis konkrét) megoldása.

Rátértünk tehát az $y'' + ay' + b = 0$ egyenletre, és megjegyeztük, hogy a megoldások vektorteret alkotnak, azaz ha y_1 és y_2 megoldások, akkor $c_1y_1+c_2y_2$ is megoldás bármely c_1, c_2 valós szám esetén (ezt HF-nek adtam végiggondolni, egyszerű behelyettesítés az egyenletbe, és csupán a deriválás linearitását kell használni). Rögtön felmerül két kérdés: hány dimenziós a vektortér és mi egy bázisa? Ehhez két szép tételt igazoltunk (amelyek Abeltől származnak).

Az első tétel arról szólt, hogy ha y_1 és y_2 megoldások, akkor $e^{ax}\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big)$ konstans-függvény (tehát valójában x-től független állandó az értéke). Ezt egyszerű deriválással be is láttuk: a szóban forgó függvény deriváltja minden pontban 0. Megemlítettem, hogy valójában

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

és ezt szokás Wronski-determinánsnak hívni, amelyre ezután a tömörebb $W(y_1, y_2)$ jelölést használtam.

Észrevettük, hogy mivel $e^{ax}W(y_1, y_2)$ konstans és $e^{ax} \neq 0$, ezért a Wronski-determináns vagy minden pontban 0, vagy minden pontban nem nulla (de nem konstans!). Egy másik fontos észrevételünk volt, hogy ha $y_2 = cy_1$ (az indexek felcserélhetők), ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $W(y_1, y_2) = 0$ (a determináns két oszlopa egymás számszorosa, de közvetlen számolással is látható, hogy nulla a determináns). Ez azt jelenti, hogy ha $W(y_1, y_2) \neq 0$, akkor y_1 és y_2 lineárisan függetlenek.

Az olyan tulajdonságú y_1, y_2 megoldáspárt, amelyre $y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$ (tehát nem azonosan 0 vagy most ezzel ekvivalensen legalább egy pontban nem nulla) *alaprendszernek* hívjuk vagy azt mondjuk, hogy y_1, y_2 *alaprendszert alkot.* Abel másik fontos tétele pedig éppen arról szól, hogy egy alaprendszer nemcsak lineárisan független, de generátorrendszer is egyúttal, tehát bázis.

A második tétel tehát azt mondja ki, hogy ha y_1 és y_2 olyan megoldások, amelyekre a $y_1y_2' - y_1'y_2$ nem 0, akkor az $y'' + ay' + by = 0$ egyenlet tetszőleges y megoldása előáll y_1 és y_2 lineáris kombinációjaként, azaz $y = c_1y_1 + c_2y_2$ alakban. A tételt az előző állítás segítségével láttuk be, némi egyenletrendszer-átalakítással ötvözve.

Ezek után már csak egy konkrét alaprendszerre volt szükségünk. Ennek érdekében bevezettük az $y'' + ay' + by = 0$ differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* fogalmát: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (ami egy másodfokú algebrai egyenlet). A gyökök függvényében expliciten megadható egy-egy alaprendszer:

- ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós gyökök, akkor $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ alaprendszert alkot.
- ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ egyetlen (kétszeres) valós gyök, akkor $e^{\lambda x}$ és $xe^{\lambda x}$ alaprendszert alkot.
- ha $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ két különböző nem valós (tehát komplex) gyök (amelyek szükségképpen egymás konjugáltjai), akkor $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ és $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ alaprendszert alkot.

A három esetből mindössze az elsőt láttuk be, de azt mondtam, hogy aki jelest szeretne, attól elvárom a többit is.

Az óra végén egy alkalmazást tárgyaltunk: a rugómozgást. A rugóra m tömegű testet helyezünk; ekkor az egyensúlyi helyzetből való kitérítés esetén a visszatérítő erő arányos az $x(t)$ kiteréssel (és vele ellentétes irányú, hiszen visszatérít). A súrlódástól eltekintve ebből Newton 2. törvénye alapján az $x'' + \frac{D}{m}x = 0$ differenciálegyenlet adódik. Szokás a $\sqrt{D/m} = \omega_0$ jelölés, mert ezzel a megoldások általános alakja: $x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)$. Bevezetve az $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ számot és egy olyan φ_0 szöget, amelyre $\sin\varphi_0 = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos\varphi_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, a megfelelő addíciós képletből végül azt nyerjük, hogy $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. A rugón lévő test tehát – ahogy szemléletünk alapján várjuk – periodikus mozgást fog végezni, méghozzá $T = 2\pi/\omega_0$ periódusidővel és A amplitúdóval. Ez a *harmonikus rezgőmozgás*. A rezgés úgynevezett természetes vagy sajátfrekvenciája az ω_0.

Ha a testre külső kényszererő hat, az egyszerűség kedvéért $F(t) = M\sin(\omega_k t)$ alakot feltételezünk (periodikus külső erő például az, hogy időközönként meglökünk egy hintát), akkor a megoldás $\omega_k \neq \omega_0$ esetén

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{M}{m(\omega_0^2 - \omega_k^2)}\sin(\omega_k t);$$

ha pedig $\omega_k = \omega_0$, akkor

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{M}{2m\omega_0}t\cos(\omega_0 t).$$

(Ezeket nem kell megjegyezni vizsgára.) Mindez könnyen ellenőrizhető, csupán behelyettesítéssel meg kell győződni arról, hogy a mindkét összeg második tagja tényleg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

A megoldások iménti alakjából azt látjuk, hogy ha a külső erő frekvenciája különbözik a rendszer sajátfrekvenciájától, akkor a harmonikus rezgőmozgásra „rárakódik” egy periodikus rezgés, méghozzá a rendszer válasza a külső erőre (itt tréfás példaként azt mondtam, hogy ha nem kellene iskolába járni, akkor mindenki otthon pihenne, de a tanár mint külső erő kikényszeríti, hogy a pihenés mellett be kell járni órára periodikusan, ez a külső erőre adott válasz).

Ha azonban a külső erő frekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával, akkor egy nem korlátos tag adódik a harmonikus rezgéshez (a $t\cos t$ függvény grafikonját fel is rajzoltam), vagyis a rugónak tetszőlegesen nagy kitérései is lesznek, ami egy idő után fizikailag nem lehetséges, katasztrófa következik be, a rugó elszakad (a valóságban persze van súrlódás, amit most nem vettünk figyelembe). Ezt a kritikus $\omega_k = \omega_0$ esetet szokás *rezonanciának* hívni, amelyet a hétköznapokban is sokszor tapasztalhatunk, és ennek illusztrálására levetítettem a Tacoma-híd leszakadását, továbbá a londoni gyalogoshíd rezonanciáját, valamint a Volgograd-híd rezonanciáját.