Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2020. tavasz

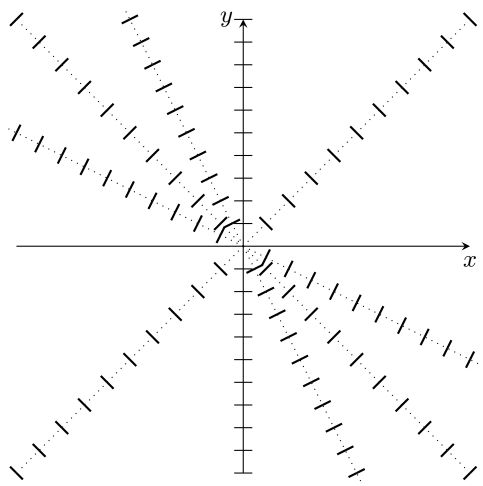
2. előadás (február 20.)

Az előadás elején felírtam a múlt órán megoldott $y' = -x/y$ differenciálegyenletet. Megbeszéltük, hogy ennek a megoldásait analitikusan kerestük meg a múltkor, tehát a „fizikus” vagy a precíz módszerrel megadtuk a megoldások képletét. Most az egyenletre más szemszögből, geometriailag fogunk tekinteni. Az *analitikus* és *geometriai* nézőpontokbeli fogalmakat a következő táblázatba rendeztem, amelyet fokozatosan töltöttünk ki:

analitikus	geometriai
derivált	érintő meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Először tisztáztuk, hogy a *derivált* nem más, mint a grafikon érintőjének *meredeksége*. Tehát, ha az $y' = -x/y$ differenciálegyenlet egy konkrét megoldását kiszemeljük, amelyre $y(x_0) = y_0$ teljesül, akkor a grafikonjának az (x_0, y_0) pontbeli érintője $y'(x_0) = -x_0/y_0$ meredekségű. Ezt a síkon az (x_0, y_0) pontba húzott, megfelelő meredekségű kis vonalkával szemléltetjük (én ezt viccesen pálcikának, fogpiszkálónak szoktam hívni, de ez kizárólag az én házi elnevezésem!). A vonalkát persze a sík összes pontjába megpróbálhatjuk berajzolni, így kapjuk az úgynevezett *iránymezőt*, ami tehát a *differenciálegyenlet* geometriai megfelelője. Az egyenletnek a megoldásai analitikusan *megoldásfüggvények*, geometriailag pedig arról van szó, hogy a megoldások grafikonjait keressük oly módon, hogy a grafikonokat a megfelelő vonalkák érintsék. Úgy próbáltam szemléltetni, hogy a síkot egy áramló folyónak képzeljük, amelynek minden pontjában az áramlás irányát jelképzeik a kis vonalkák. Ha egy pontba egy falevelet ráhelyezünk a vízre, akkor az elkezd áramlani, és kijelöli számunka az adott ponton átmenő *megoldásgrafikont* (az lesz a levél pályája). Természetesen egy egyenlet esetében nem tudjuk a sík összes pontjába berajzolni a vonalkákat, de a számítógép nagyon sok pontba be tudja rajzolni (felosztja a síkot egy ráccsal és minden rácspontba). Kézzel azonban nem hasraütésszerűen rajzoljuk be a vonalkákat, hanem adott meredekségű vonalkákat célszerű berajzolni. A sík azon halmaza, ahol a megoldásgrafikonok érintőjének meredeksége egy adott állandó, az úgynevezett *izoklina* (ahol nulla a meredekség az a *nullklina*).

Az $y' = -x/y$ egyenlet esetében meghatároztunk néhány izoklinát (konkrétan a $0, 1, -1, 2, 1/2$ meredekséghez tartozókat), és berajzoltuk a vonalkákat, az alábbi ábrát kaptuk ezáltal.



Az ábra alapján azt sejtettük, hogy a megoldásgörbék origó középpontú félkörvonalak, tehát analitikusan $y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. És valóban, a múlt órán ez jött ki (r^2 helyett c-vel).

Ezután rátértünk az elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletekre. Az általános alakjuk: $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, ahol p és q egy adott I intervallumon értelmezett rögzített függvények.

Megbeszéltük az elsőrendű (az egyenletben legfeljebb elsőrendű derivált szerepel és az ténylegesen van is benne), a lineáris (p és q csak a változótól függnek), a homogén (ha q azonosan 0) és inhomogén (ha q nem azonosan 0) szavak jelentését.

Némi motiváció után (a gyakorlaton látottakra alapozva) közösen kitaláltunk egy megoldási módszert: ha p-nek van primitív függvénye, akkor legyen P egy rögzített ezek közül, és szorozzuk az egyenletet e^P-vel (ezt szokás *integráló tényezőnek* hívni). Ekkor a bal oldalon éppen $(ye^P)'$ áll, így mindkét oldal integrálása és rendezés után $y = e^{-P} \int qe^P$ adódik, feltéve, hogy a qe^P függvénynek van primitív függvénye. A képletet egy kis tételben is megfogalmaztam, de azt javasoltam, hogy a kapott megoldóképlet helyett inkább csak azt véssük jól a fejünkbe, hogy mivel célszerű beszorozni az egyenletet, utána már könnyen ki lehet hozni a megoldást.

Egy fontos észrevételünk volt a következő. Ha $\tilde{Q}$ egy konkrét primitív függvénye qe^P-nek, akkor az összes többi primitív függvény $\tilde{Q} + c$ alakú, így

$$y = e^{-P}\tilde{Q} + c \cdot e^{-P},$$

ahol az első tag egy konkrét (idegen szóval *partikuláris*) megoldása az egyenletünknek, a második tag pedig a homogén egyenlet (azaz $y' + py = 0$) összes (vagy más néven általános) megoldása. Röviden (a sorrendet megcserélve): $y = y_h + y_p$ (ezt be is kereteztem), vagyis az inhomogén egyenlet összes megoldása előáll a homogén összes (vagy más szóval általános) megoldásainak és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként.

Valójában ez az észrevétel sokkal általánosabb keretek között is érvényes, méghozzá bármely *lineáris* feladat esetében. Ennek kapcsán tisztáztuk, hogy egy $Ly = F$ alakú feladatot (ahol L egy lineáris „operátor”, vagyis egy „fekete doboz”, amely „valamilyen objektumhoz egy másik objektumot rendel”) mikor nevezünk lineárisnak (ha $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2$ minden c_1, c_2 konstans esetén). Ha a feladat lineáris, akkor érvényes a megoldások $y = y_h + y_p$ alakú előállítása.

Az észrevétel hasznosságát szemléltetendő, egy nagyon egyszerű példát mutattam: $y' + y = x$ megoldásai. Az $y' + y = 0$ homogén egyenlet megoldásai a múlt óráról jól ismertek (radiokatív bomlás speciális esete): $y_h = ce^{-x}$. Partikuláris megoldást pedig a próbafüggvény módszerével kerestünk $y(x) = ax + b$ alakban, és azt találtuk, hogy $y_p(x) = x - 1$ megoldás. Így máris megkaptuk – integrálás nélkül –, hogy az egyenlet összes megoldása: $y(x) = ce^{-x} + x - 1$.

Tréfás példaként megnéztük a kis hangya és a gonosz manó problémáját: a 10 cm hosszú tetszőlegesen nyújtható gumiszalag végről egy hangya a szalag falhoz rögzített vége felé 1 cm/s sebességgel halad, miközben egy gonosz manó ellenkező irányban 100 cm/s sebességgel húzza a kötél végét. Eljut-e kis hangya a falhoz? A hangyának a faltól vett $y(t)$ távolságára adódó differenciálegyenlet levezetése nem szerepel a könyvben (csak annyit mond róla, hogy nem nehéz belátni), ezért hasznosnak láttam elmondani, főleg azért is, hogy lássunk egy viszonylag standard technikát („mi történik kicsiny Δt idő alatt?”).

Ha Δt nagyon piciny, akkor „olyan mintha a nyújtás és a hangya falfelé mozgása egymás után történne”. A nyújtás során a hangya az $y(t)$ helyről (egyszerű hasonlóság miatt) az

$$y(t)\frac{10 + 100t + 100\Delta t}{10 + 100t}$$

helyre kerül, ezután pedig Δt-vel balra sétál, így végül a $t + \Delta t$ időpillanatbeli helyzete:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y(t)\frac{100\Delta t}{10 + 100t} - \Delta t.$$

Ebből átrendezés és $\Delta t \to 0$ határátmenet után kapjuk, hogy

$$y'(t) = -1 + \frac{100y(t)}{10 + 100t}.$$

Ez egy elsőrendű lineáris egyenlet, házinak adtam a megoldását, és a hallgatóság kérésére nem árultam el, hogy vajon a hangya elér-e a falhoz. Következő órán megbeszéljük.

Ezek után rátértünk a másodrendű lineáris egyenletekre: $y'' + py' + qy = r$, ahol $p, q, r\colon I \to \mathbb{R}$ adott függvények (I intervallum). Csak speciális esetet nézünk: $p = a$, $q = b$ konstansok (az egyenlet állandó együtthatós) és $r = 0$ (homogén egyenlet).