Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2020. tavasz

1. előadás (február 13.)

A technikai és tematikai tudnivalók után az első főbb témakörünket kezdtük el: közönséges differenciálegyenletek. Megemlítettem, hogy a közönséges szó az egyváltozós deriváltra utal, mert vannak például parciális differenciálegyenletek is, amelyekben többváltozós függvények szerepelnek.

Motivációként a derivált fogalmának jelentését elevenítettük fel. Most nem mint az érintő meredekségére fogunk gondolni, hanem egy $x(t)$, időtől függő (fizikai/biológiai/kémiai/közgazdaságtani stb.) mennyiség pillanatnyi változási sebességére. Ha Δt ideig tekintjük a változást, akkor a mennyiség megváltozása $x(t+\Delta t) - x(t)$, így az *átlagos* változási sebessége

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenettel ebből az $x'(t)$ deriváltat kapjuk, ami megadja a t időpillanatbeli *pillanatnyi* változási sebességet. Ha $x(t)$ az autó által megtett út, akkor $x'(t)$ a megszokott sebesség, ami a mérőműszeren látszik. Ezzel kapcsolatban elmeséltem Richard Feynman anekdotáját a gyorsan hajtó autósról.

Ezután példákat hoztam fel időben változó folyamatokra.

- populáció egyedszámának korlátlan növekedési modellje: az $x(t)$ egyedszám (feltesszük, hogy nem csak egész értékeket vehet fel, hanem valósakat) változási sebessége arányos az aktuális egyedszámmal, matematikailag $x'(t) = kx(t)$, ahol k arányossági tényező, amely pozitív, mert növekedésről van szó, tehát $x'(t) \geq 0$;

- radioaktív bomlás: radioaktív anyag mennyiségének változási sebessége arányos az anyag mennyiségével, azaz $x'(t) = -kx(t)$, ahol a mínusz jel azért kell, mert most bomlásról van szó, tehát $x'(t) \leq 0$. Konkrét példaként a szén radioaktív ^{14}C változatát hoztam fel, amelynek felezési ideje (tehát amennyi idő alatt megfeleződik a kiindulási mennyiség) 5730 év. Ennek gyakorlati alkalmazása a radiokarbon kormeghatározás, gyakorlaton lesz ezzel kapcsolatban feladat.

- Newton-féle lehűlési törvény: a lehűlés sebessége arányos a közeg és a test hőmérsékletének különbségével (a közeg hőmérsékletét állandónak feltételezzük), matematikailag $T'(t) = k(T_{\text{közeg}} - T(t))$, ahol T a test hőméréséklete (egy hűtőbe tett ital példáját hoztam fel) és $k > 0$, mert lehűlésről van szó (tehát $T_{\text{közeg}} < T(t)$ esetén $T'(t) < 0$);

- keverési folyamat: edényben lévő tiszta vízbe valamilyen adott koncentrációjú oldat folyik be, elkeveredik, majd a felesleg kiürül; kérdés: az edényben lévő oldat koncentrációja (egyenletet nem írtam fel, gyakorlaton előkerülhet).

Ezután meseszerűen, idézőjeles definícióban megfogalmaztam, hogy mit is értünk differenciálegyenleten: keresendő egy $x\colon I \to \mathbb{R}$ függvény (ahol I valós intervallum), amelyre teljesül egy egyenlet, amely az x deriváltjait tartalmazza. Formálisan:

$$\Phi\big(t, x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = 0 \quad (t \in I),$$

ahol Φ valamilyen adott sokváltozós függvény. Például a korlátlan növekedés esetében: $x'(t) - kx(t) = 0$, tehát $\Phi(t, x(t), x'(t)) = x'(t) - kx(t)$ (ezután hasraütésszerűen felírtam még egy példát, azt hiszem $(x'(t))^2 - 2x''(t) + t = 0$ volt).

Ezt követően megjegyeztem, hogy egy másik jelölésrendszer is használatos (a tankönyvben ez a másik van), méghozzá az ismeretlen függvény y, a változó pedig x: $y(x)$. Az $x(t)$ és $y(x)$ jelöléseket néha váltogatom majd, hogy szokjuk meg. Az egyes könyvek is gyakran eltérő jelöléseket használnak attól függően, hogy fizika, matematika stb. témában íródtak.

Az egyenletekhez hozzávehetünk kezdeti feltételt, vagyis megadhatjuk a megoldás és/vagy valamely deriváltjainak értékét egy adott kezdeti időpillanatban. Így egy kezdetiérték-feladatot nyerünk, például:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Végül előrevetítettem, hogy háromféle egyenlettípust fogunk tüzetesebben megvizsgálni: szeparábilis, elsőrendű és másodrendű lineáris.

Rátértünk a szétválasztható változójú, más szóval szeparábilis egyenletekre. Általános alakjuk:

$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$

ahol $f\colon I \to \mathbb{R}$ és $g\colon J \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ezután a megoldási módszer következett. Ha g seholsem vesz fel 0 értéket, akkor oszthatunk $g(y(x))$-szel:

$$y'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(y(x)) = f(x),$$

ahol a bal oldalon a második tényező kissé körlményes jelölése azt jelenti, hogy az $1/g$ függvény az $y(x)$ ($1/g$ „hasában" az $y(x)$). Feltéve, hogy f-nek és $1/g$-nek egyaránt van primitív függvénye, legyen egy konkrét primitív függvény F és G, akkor az előbbiből

$$(G(y(x)))' = F'(x),$$

így $G(y(x)) = F(x) + C$ valamilyen C konstanssal. Ez utóbbi egyenletnek (megfelelő feltételek mellett) az eredetivel való ekvivalenciáját tételként is megfogalmaztam. Az iménti implicit egyenletből szerencsés esetben kifejezhető az y megoldás.

Példaképpen megoldottuk az $y'(x) = ky(x)$ egyenletet először az előbbi gondolatmenet mentén. Azután pedig a „fizikus módszerrel". Ez azt takarja, hogy y' helyett dy/dx-et írunk, és az y-os tagokat (beleértve dy-t is, bármi legyen is az) az egyik oldalra, az x-es tagok (beleértve dx-et, bármi legyen is az) a másik oldalra rendezzük, majd integrálunk a megfelelő változók szerint, és végül a kapott implicit egyenletből kifejezzük y-t.

Második példa az $y'(x) = -x/y(x)$ egyenlet volt. Ezt is megoldottuk, és láttuk, hogy a megoldás nincs mindenütt értelmezve. Itt az óra végi sietségben egy apró elírást vétettem az értelmezési tartományban (szerencsére volt, aki észrevette), de erre az egyenletre még vissza akarok térni a következő órán.

Utolsó kérdésként azt tettem fel, hogy mondjunk nem szeparábilis egyenletre példát. Nagyon helyesen az a válasz érkezett, hogy $y'(x) = x + y(x)$. Csillagos feladatnak adtam fel, hogy precízen lássuk be, valóban nem áll elő megfeleló szorzat alakban a jobb oldal (a ránézés nem indoklás, mert attól, hogy két kifejezés ránézésre nem egyforma, még lehetnek azonosan egyenlők, például $\sqrt{x^2} = |x|$.)