Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

9. előadás (április 8.)

Az óra elején a nevezetes határértékek témakörét folytattuk. Az (a^n) sorozat kapcsán hátra volt még az $|a| < 1$ eset, amikor $a^n \to 0$ (ezt visszavezetéssel igazoltuk), valamint az $a \le -1$ eset. Itt beláttuk, hogy $(-2)^n$ oszcillálva divergens (mert sem alulról, sem felülről nem korlátos). Ezt követően megmutattuk, hogy $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$, ezt az előző típusú határértékre vezettük vissza n-edikre emeléssel. Végül pedig az $\sqrt[n]{n} \to 1$ határértéket igazoltuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség trükkös alkalmazásával, az $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1}$ felbontást használva (házinak feladtam, hogy vajon az $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n \cdot 1 \ldots \cdot 1}$ alak miért nem célravezető).

Rátértünk ezt követően a limesz és műveletek kapcsolatára, az összeadással kezdtük. Egy táblázatba foglalva kimondtam, hogy ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor mit mondhatunk az $(a_n + b_n)$ összegsorozat határértékéről. Beláttuk, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \to a + b$ (a bizonyításban a háromszög-egyenlőtlenséget használtuk); ha $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$; ha $a = \infty$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$ (valójában azt láttuk be, hogy egy alulról korlátos és egy végtelenhez tartó sorozat összege végtelenhez tart); a többit házinak adtam ezek alapján meggondolni. A táblázatban két helyen kérdőjeleket hagytunk, amelyek a kritikus határértékeket jelentik, konkrétan, amikor a és b közül az egyik ∞, a másik pedig $-\infty$. Ebben az esetben $a_n + b_n$ viselkedése a konkrét sorozatoktól függ, mind a négy kategóriába eső példát lehet adni, és adtunk is: $a_n = n+1$, $b_n = -n$ esetén $a - n + b_n = 1 \to 1$; $a_n = 2n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n \to \infty$; $a_n = n$, $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n \to -\infty$; $a_n = n + (-1)^n$ (miért tart végtelenhez?), $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$.

Ezután megjegyeztem, hogy a limesz és összeadás kapcsolata két tag helyett véges sok (pl. három) tagra is átvihető. De vigyázzunk, mert például az n tagú $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ összeg minden tagja 0-hoz tart, és az összeg minden n-re 1 (itt azért nem használhatjuk a tételünket, mert az összeg tagjainak száma nem fix).

Az előadás a limesz és a szorzás kapcsolatával folytattuk. Rögtön ki is mondtam azt a tételt, hogy mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ határértékről, amennyiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$: a választ egy táblázatban foglaltuk össze. Bizonyításképpen megnéztük az $a, b \in \mathbb{R}$, az $a > 0$ és $b = \infty$, valamint $a = b = \infty$ eseteket (a bizonyítások az összadás esetében alkalmazottakhoz hasonlóak, kis módosításokkal); a többit házi feladatnak adtam fel (de vizsga előtti konzultáción mindent meg lehet kérdezni). A kritikus határértékekre is néztünk példát, méghozzá láttuk, hogy $a = 0$, $b = \infty$ esetén a szorzatsorozat viselkedése mind a négyféle kategóriába eshet: $a_n = 1/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = 1$, tehát konvergens; $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = n$, tehát $a_n b_n \to \infty$; $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = -n \to -\infty$; $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = (-1)^n$ oszcillálva divergens. Azt is megjegyeztem, hogy a limesz és szorzás kapcsolatára vonatkozó tétel csak véges sok (rögzített számú) tényező esetére alkalmazható. Például az n tényezőből álló $(\sqrt[n]{2})^n$ szorzatnak mind az n darab tényezője 1-hez tart, de a szorzat értéke minden n-re 2. Egy másik becsapós példa az $(1 + \frac{1}{n})^n$ szorzat, amely „tényezőnként 1-hez tart", de a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $(1 + \frac{1}{n})^n \ge 2$, tehát ha egyáltalán van limesze, akkor az mindenképpen legalább 2.