Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

8. előadás (április 1.)

A végtelenhez tartó sorozatok témakörével kezdtünk foglalkozni. Két definíciót mondtam. Az első: az (a_n) sorozat végtelenhez tart, ha minden $P \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > P$. A másik definíció:: minden P valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(K, +\infty)$ félegyensen kívül (azaz véges sok kivétellel $a_n > P$). Beláttuk a két definíció ekvivalenciáját, majd bevezettem a szokásos $a_n \to \infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelöléseket. Példaként megnéztük az $a_n = n$, $a_n = n^2$ és $a_n = n - \sqrt{n}$ sorozatok végtelenhez tartását a küszöbszámos definíció szerint.

Következett ezután a $-\infty$-hez tartás két definíciója. Az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden P valós számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n < P$. Ezzel ekvivalens (az ekvivalenciát házi feladatnak adtam), hogy az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden P valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(-\infty, P)$ félegyenesen kívül. Beláttuk, hogy az $a_n = -n$ sorozat határértéke $-\infty$ és az $a_n = -n^2$ sorozaté is az. Bevezettem az oszcillálva divergens sorozat elnevezést az olyan sorozatokra, amelyeknek se véges, se $\pm\infty$ határértéke nincs. Tisztáztuk, hogy ha (a_n) divergens, akkor lehet $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$ és (a_n) oszcillálva divergens is. Ha pedig azt mondjuk, hogy (a_n)-nek van határértéke, akkor az jelentheti, hogy konvergens, $a_n \to \infty$ vagy $a_n \to -\infty$.

Ezután a határérték és korlátoság témakörének tárgyalása következett. Beláttuk, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos (vagyis az $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz korlátos). Az $a_n = (-1)^n$ sorozat példája mutatja, hogy ez megfordítva nem igaz. Igazoltuk, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, de felülről nem korlátos. A megfordításra ellenpéldaként azt a sorozatot mutattuk, amelyre $a_n = n$ páros n esetén és $a_n = 0$ különben. Kimondtam, hogy ha $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos, de alulról nem; a bizonyítást házi feladatnak adtam.

Az óra utolsó részében felírtam néhány konkrét sorozatot, amelyek határértékét megvizsgáljuk: (n^α), a^n, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$. Beláttuk, hogy az (n^k) hatványsorozat határértéke 1, ha $k = 0$; ∞, ha $k > 0$ és egész; továbbá 0, ha $k < 0$ és egész. Ezután a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével megmutattuk, hogy $a > 1$ esetén $a^n \to \infty$. A tétel többi része a jövő órán következik.