Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

7. előadás (március 25.)

Rátértünk a sorozatok konvergenciájának témakörére. Először szóban beszéltem a sorozat fogalmáról: egy sorozat valójában függvény, amely a pozitív egészeken van értelmezve, de a fejünkben továbbra is $a_1, a_2, \ldots$ (később a függvény fogalmánál visszautalok majd erre). Sok példát mutattam sorozatok különböző megadására: explicit megadás ($a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $a_n = (-1)^n$), rekurzív (Fibonacci; $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; $a_{n+1} = a_n/2$ ha a_n páros és $a_{n+1} = 3a_n + 1$, ha a_n páratlan;ez utóbbi kapcsán a Collatz-problémáról is meséltem) és egyéb definícióval adott (a_n az n-edik prímszám; a_n a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakjának n-edik tizedes jegye; kérdés, hogy ez utóbbiak vajon megadhatók-e explicit alakban?). Ezután az $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$ és $a_n = (-1)^n$ sorozatok kapcsán megfigyeltük a 0-hoz tartás és nemtartás jelenségét. A példák által motiválva megfogalmaztam a sorozat határértékének kétféle definícióját: az (a_n) sorozat határértéke $b \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; |a_n - b| < \varepsilon.$$

Másrészt: az (a_n) sorozat határértéke a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ véges sok kivétellel teljesül (más szóval az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervallumon kívül). Beláttuk, hogy a két definíció egymással ekvivalens. Ezt követően példákat néztünk határértékre és küszöbszámokra: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ (ez utóbbinál a „fáradékony bolha” tréfás elnevezést mondtam). A „küszöbmentes” definícióval megmutattuk, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak nem határértéke az $\frac{1}{2}$, házinak feladtam, hogy a „küszöbös” definícióval is gondoljuk ezt végig, majd tetszőleges b esetén is. Ezután bevezettem a konvergens és divergens sorozat elnevezéseket: konvergens egy sorozat, ha van olyan b valós szám, amely határértéke; divergens, ha nem konvergens, vagyis nincs olyan b valós szám, amely határértéke lenne. Ezt követően néhány megjegyzést tettem a két definícióval kapcsolatban. Egyrészt, nem kell a legkisebb N küszöbszámot megadni, elegendő egy jót; sőt a küszöbnek nem szükséges egésznek lennie. Másrészt, ha ε-hoz N jó küszöb, akkor minden N-nél nagyobb szám is jó küszöb ugyanehhez az ε-hoz. Végül, ha N jó küszöb ε-hoz, akkor minden $\varepsilon' > \varepsilon$ számhoz is jó küszöb. Végül, ha a $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervallumon kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak, akkor belül végtelen sok, azonban fordítva nem igaz (pl. $(-1)^n$, $b = 1$, $\varepsilon = 1/2$). Az óra végén beláttuk, hogy a határérték egyértelmű, a szokásos indirekt okoskodással.