Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

6. előadás (március 29.)

Az előadást a teljességi tétel múlt óráról elnapolt bizonyításával kezdtük. A legkisebb felső korlát esetét néztük meg, intervallumfelezéssel bizonyítottunk, legyártottuk az $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott intervallumsorozatot a következő tulajdonságokkal: a_n nem felső korlátja H-nak, b_n felső korlátja H-nak, továbbá $b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$. A Cantor-axióma garantál egy α elemet az intervallumok metszetében, és az arkhimédészi axióma alapján nem nehéz meggondolni, hogy a metszet szükségképpen egyelemű. Végül indirekt módon beláttuk, hogy α felső korlát, továbbá α-nál nincs kisebb felső korlát (az ellentmondás mindkét esetben az lett, hogy találtunk a metszetben egy másik elemet is).

A teljességi tételnek az alsó korlátra vonatkozó párja úgy szól, hogy minden nemüres alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. A bizonyításról annyit mondtam, hogy úgy megy, mint a felső korlát esete, vagy visszavezetéssel az előző tételre, ha a $(-H)$ halmazra alkalmazzuk a tételt (ezt esetleg érdemes otthon végiggondolni).

Ezután még két példát néztünk meg. Beláttuk, hogy $\sup(a, b) = b$, valamint, hogy $\sup \mathbb{N}^+ = \infty$ (vagyis a pozitív egészek halmaza felülről nem korlátos; itt elidőztünk picit azon, hogy mi a különbség a „nincs legnagyobb eleme" és a „nincs felső korlátja" kijelentések között).

Ezt követően belevágtunk a hatványozás témakörébe. Elmondtam, hogy a felépítés sorrendje: pozitív egész kitevő, nulla kitevő, egész kitevő, racionális kitevő, valós kitevő.

Bevezettük az $a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ jelölést, ha a valós és n pozitív egész (legalább 2). Kimondtam a hatványozás azonosságait, és pár szót ejtettem a bizonyításról (házinak feladtam). Hogy az azonosságok érvényben maradjanak, $a \neq 0$ esetén $a^0 = 1$ (a 0-nak nem értelmezzük 0-adik hatványát), továbbá $a^{-n} = 1/a^n$. Ezután emlékeztettem az n-edik gyök fogalmára, majd definiáltam a racionális kitevőjű hatvány esetét: ha p, q egészek, akkor $a > 0$ esetén legyen $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$. Beláttuk, hogy ha $p/q = m/n$, akkor $(\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[r]{s})^s$, így értelmes a definíció, sőt megmaradnak a hatványozás azonosságai is. Ezek után a valós kitevőjű hatványokra tértünk rá, a $2^{\sqrt{2}}$ értelmezéséről elmélkedtünk először. Megbeszéltük, hogy a következő monotonitási tulajdonságot szeretnénk megőrizni: ha $a > 1$ és $r < s$ racionális számok, akkor $a^r < a^s$ (ezt be is láttuk). Ennek a segédállításnak a $0 < a < 1$ alapra vonatkozó párját is kimondtuk, de nem igazoltam (hasonlóan megy, vagy visszavezetéssel). Ezek után tételként megfogalmaztam, hogy

$$A := \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \qquad B := \{a^s : x < s, s \in \mathbb{Q}\}.$$

esetén $\sup A = \inf B$. A bizonyításnak azt a részét megnéztük, hogy $\sup A \leq \inf B$. Valójában azt láttuk be, hogy ha minden $b_1 \in A$ és $b_2 \in B$ esetén $b_1 < b_2$ (itt elég lenne $b_1 \leq b_2$ is), akkor szükségképpen $\sup A \leq \inf B$. Ez abból adódik, hogy minden b_2 felső korlátja A-nak, így $\sup A \leq b_2$, de ekkor $\sup A$ alsó korlátja B-nek, vagyis $\sup A \leq \inf B$. A bizonyítás második felét, nevezetesen az egyenlőség igazolását kihagytam. A tétel után kézenfekvő módon adódik a^x definíciója, amely legyen $a^x := \sup A = \inf B$. Ha $0 < a < 1$, akkor legyen $a^x = 1/((1/a)^x)$, végül pedig $1^x = 1$. Ezzel a^x-t minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmeztük. Meggondoltuk, hogy racionális x esetén ez a definíció ugyanaz, mint a korábbi, tehát valóban kiterjesztésről van szó. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált hatványfogalom rendelkezik a megszokott műveleti tulajdonságokkal, ezeket csak kimondtam, a bizonyításba nem mentünk bele (a függvényhatárérték segítségével majd nagyon egyszerűen ki fog jönni később). Végül még megfogalmaztam és igazoltam a hatványozás monotonitását: ha $x < y$, akkor $a > 1$ esetén $a^x < a^y$; továbbá azt is kimondtam, hogy $a^x > 0$ bármely $a > 0$ és x esetén.