Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

5. előadás (március 11.)

Az előadás elején újra felírtam a táblára a múlt órán már megbeszélt fogalmakat: véges tizedes tört, és végtelen tizedes tört alak. Ez utóbbi kapcsán megbeszéltük, hogy átfogalmazva így is írhatjuk:

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[n{,}a_1a_2\dots a_k; n{,}a_1a_2\dots a_k + \frac{1}{10^k} \right],$$

ahol egymásba skatulyázott nemüres, zárt intervallumok szerepelnek, ezért a Cantor-axióma miatt valóban van közös elemük. Beláttuk, hogy az iménti intervallumoknak pontosan egy közös elemük van, ami egy egyszerű becslésből és az arkhimidészi axiómából adódott. Mindez azt jelenti, hogy minden végtelen tizedestört egyértelműen meghatároz egy nemnegatív valós számot, amelynek az a végtelen tizedestört alakja.

Ezután két kérdést tettem fel: 1) létezik-e minden nemnegatív valós számnak végtelen tizedes tört alakja? 2) Ha igen, akkor egyértelmű-e? Az első kérdésre válaszként konstruktív módon bebizonyítottuk, hogy minden $x \geq 0$ számnak van végtelen tizedestört alakja (sőt olyat gyártottunk, hogy a fenti egyenlőtlenségekben a jobb oldalon szigorú egyenlőtlenség teljesül). Kimondtuk, hogy a végtelen tizedes tört alak egyértelmű, kivéve ha x pozitív véges tizedes tört alakban felírható szám. Ekkor kétféle végtelen tizedes tört alakja van ($\dots,\dots a_k00000\dots$ és $\dots,\dots(a_k-1)999\dots$, tehát az egyikben egy indextől kezdve minden jegy 0, a másikban pedig csupa 9). A bizonyításnak csak azt a részét mondtam el, hogy ha x-nek legalább két alakja van, akkor x szükségképpen véges tizedes tört. A befejezést a jegyekre vonatkozóan házinak adtam. A téma lezárásaként a végtelen tizedes tört alak definíciójára támaszkodva beláttuk (az egyenlőtlenségeket 100-zal szorozva, majd 23-at kivonva és az első tételre támaszkodva), hogy a 0,232323... végtelen tizedes tört alak az $x = 23/99$ valós számhoz tartozik. A végén még megemlítettem két kérdést is, amelyekről gyakorlaton lesz szó: melyek a véges tizedes tört alakban felírható racionális számok? mely valós számok végtelen tizedes tört alakja szakaszos?

Ezt követően rátértünk a korlátos halmazok témakörére. Értelmeztük egy H valós számhalmaz legnagyobb elemének (maximumának) és legkosebb elemének (minimumának) fogalmát. Mindkettő a halmaz eleme kell hogy legyen, a maximumnál nincs nagyobb elem a halmazban, a minimumnál nincs kisebb. Bevezettük a $\max H$ és $\min H$ jelöléseket és néztünk sok példát: megbeszéltük, hogy nemüres véges halmaznak van maximuma és minimuma (ez az elemszámra vonatkozó indukcióval igazolható); voltak további példaként az $[a, b]$ és (a, b) intervallumok (előbbinek van maximuma és minimuma is, utóbbinak egyik sincs, mert bármely $x \in (a, b)$ esetén $(x + b)/2 > x$ és $(a + x)/2 < x$), valamint az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmaz. Ez utóbbinak azért nincs minimuma, mert minden pozitív egész n-re $1/n > 1/(n + 1)$. Végül még a pozitív egészek halmazáról is láttuk, hogy nincs maximuma, mert $n + 1 > n$ minden n pozitív egészre.

Ezután az alsó és felső korlát értelmezésével folytattuk. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám felső korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \leq P$. Egy halmazt felülről korlátosnak mondunk, ha van felső korlátja. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám alsó korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \geq P$. Egy halmazt alulról korlátosnak mondunk, ha van alsó korlátja. Ezután ismét példákat néztünk. Láttuk, hogy az $[a, b]$ és (a, b) intervallumoknak b egy felső korlátja, és minden, b-nél nagyobb szám is felső korlát. Hasonlóan, az $[a, b]$ és (a, b) halmazoknak a egy alsó korlátja, és minden, a-nál kisebb szám is az. Ezenkívül megnéztük az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmazt, amelynek az 1 felső korlátja, és a 0 alsó korlátja, sőt, igazoltuk, hogy a legnagyobb alsó korlát.

Ezután a példák által illusztrálva kimondtam a teljességi tételt, amely szerint minden nemüres felülről korlátos H számhalmaznak van legkisebb felső korlátja.

A teljességi tételnek az alsó korlátra vonatkozó párja úgy szól, hogy minden nemüres alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. A bizonyítást idő hiányában elnapoltuk, helyette néhány definíciót beszéltünk meg.

A teljességi tételek alapján definiáltuk H nemüres felülről korlátos halmaz szuprémumát (felső határát), amelyet $\sup H$-val jelölünk. Hasonló módon, ha H nemüres alulról korlátos halmaz, akkor a legnagyobb alsó korlátját a halmaz infimumának nevezzük és $\inf H$-val jelöljük.

Ezt követően értelmeztem felülről nem korlátos halmazok szuprémumát, legyen $\sup H = \infty$, illetve alulról nem korlátos halmazok infimumát, legyen $\inf A = -\infty$ (ezek csupán jelölések, $\pm\infty$ nem valós számok). Végül az üreshalmazt néztük meg, amelynek minden valós szám felső és alsó korlátja is egyben. Ekkor egyetlen logikus definíció (megállapodás) az lehet, hogy $\sup \emptyset = -\infty$ és $\inf \emptyset = \infty$.