Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

4. előadás (március 4.)

Az előadás elején befejeztük a múlt órán félbehagyott bizonyítást: beláttuk, hogy bármely két különböző valós szám között található racionális. A bizonyítás esetszétválsztással ment, és az arkhimédészi axiómára többször is támaszkodtunk.

Ezután átismételtem a valós számok eddig bevezetett axiómáit: test, rendezési és arkhimédészi. Ezeket mind teljesíti a racionális számok teste is (tehát még a $\sqrt{2}$ létezése sem következik belőlük!), így szükség van még axiómára, hogy a valós számokat kapjuk. Ez lesz a Cantor-axióma (más felépítésben lehetne ettől eltérő is). Az axióma kimondása előtt bevezettem az egymásba skatulyázott intervallumok sorozatának fogalmát: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, ahol végtelen sok intervallumról van szó, és a tartalmazások iránya is fontos! A Cantor-axiómában azt követeljük meg, hogy egymásba skatulyázott, nem üres, zárt intervallumok metszete nem üres. Lényeges, hogy zárt intervallumokról van szó, példaként az arkhimédészi axióma segítségével beláttam, hogy a $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$. Ezzel megvan minden axióma, és a valós számok halmazára ($\mathbb{R}$) úgy tekintünk, mint egy olyan struktúra két művelettel és rendezéssel, amely teljesíti mind a 15 axiómát.

Rátértünk ezután a négyzetgyök és n-edik gyök témakörére. Tételként kimondtam, hogy minden $a \geq 0$ számhoz egyértelműen létezik olyan $b \geq 0$ szám, amelyre $b^2 = a$. A bizonyítás előtt segédállításként igazoltam, hogy ha $0 \leq x < y$, akkor $x^2 < y^2$. Ennek következményeként azt is tisztáztuk, hogy ha $0 \leq x$ és $0 \leq y$, valamint $x^2 < y^2$, akkor $x < y$. Ezután rátértnük a fő tételünk bizonyítására, amelynek fő gondolata az intervallumfelezési eljárás („oroszlánfogás"). Konstruáltunk olyan $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumokat (speciálisan $a_1 = 0, b_1 = a + 1$, amelyekre $a_n^2 \leq a \leq b_n^2$, továbbá $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$. Ekkor a Cantor-axióma miatt a metszetük nem üres, legyen egy eleme x. Nem nehéz megmutatni (becsléssel), hogy $|x^2 - a| \leq c/n$, ami (az arkhimédészi aximóma miatt) csak úgy lehetséges, hogy $x^2 = a$. A létezés után az egyértelműség jött, de ez nyilvánvalóan következik a segédállításból. Szokásos jelölés: $b = \sqrt{a}$. Hasonlóan igazolható (de nem láttam be), hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ és $a \geq 0$ számokhoz egyértelműen létezik $b \geq 0$ szám, amelyre $b^k = a$. Jelölése $\sqrt[k]{a}$.

Ezt követően rátértünk a tizedes törtekre. Megbeszéltük, hogy csak a nemnegatív esettel foglalkozunk, mert a negatív eset ellentettképzéssel adódik. Véges tizedes tört alatt az

$$n{,}a_1a_2\dots a_k = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k}$$

alakú véges összeget értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Ezután felelevenítettem a 0,999... példáját, amelyet lehetne végtelen összegként értelmezni, de ehhez egyelőre kevés eszköz áll rendelkezésünkre (a végtelen sorok témakörben viszatérünk rá). Ehelyett egyenlőtlenségekkel értelmezzük a végtelen tizedes tört alakot. Azt mondjuk, hogy az $x \geq 0$ szám végtelen tizedes tört alakja $n, a_1a_2a_3 \dots$, ha $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (ahol $j = 1, 2, 3 \dots$), továbbá

$$\begin{gathered} n \leq x \leq n+1, \\ n{,}a_1 \leq x \leq n{,}a_1 + \frac{1}{10}, \\ \vdots \\ n{,}a_1a_2\dots a_k \leq x \leq n{,}a_1a_2\dots a_k + \frac{1}{10^k}, \\ \vdots \end{gathered}$$

(Ez végtelen sok egyenlőtlenség!) Rögtön észrevettük, hogy valójában arról van szó, hogy

$$x \in \cap_{k=1}^{\infty} \left[n{,}a_1a_2\dots a_k; n{,}a_1a_2\dots a_k + \frac{1}{10^k} \right].$$

Mivel egymásba skatulyázott zárt intervallumokról van szó, ezért a Cantor-axióma miatt valóban van közös elemük. De vajon egyetlen valós szám van-e a metszetben? Innen folytatjuk.