Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

2. előadás (február 18.)

Az óra elején a teljes indukció alkalmazásaként igazoltuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget a szokásos teljes indukciós okoskodással (közben felhívtam a figyelmet arra, hogy egy „Tétel”-nek mindig vannak feltételei, és érdemes nyomon követni, hogy a bizonyításban hol használjuk azokat). Az egyenlőség esetét felírtam megjegyzésként és kértem, hogy mindenki gondolja át a bizonyítás alapján.

Az órát ezután a nevezetes közepekkel folytattuk. Értelmeztem n darab valós szám számtani (A) közepét; nemnegatív számok mértani (G) közepét és pozitív számok harmonikus (H) közepét. Észrevettük, hogy a közép elnevezés arra utal, hogy a közepek az adott n szám közül a(z egyik) legnagyobb és legkisebb között vannak (sőt, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a számok mind egyenlőek). Ezt a számtani közép és a legkisebb esetére be is láttuk, a többit házinak adtam meggondolásra.

Ezt követően kimondtam a három közép között fennálló egyenlőtlenséget ($A \geq G \geq H$), valamint az egyenlőség szükséges és elégséges feltételét (az n darab szám egyenlő). A bizonyítás két lépésből állt. Először megmutattuk, hogy ha $A \geq G$ igaz („munkahipotézis”), akkor $G \geq H$ is fennáll. A második lépésben n-re vonatkozó teljes indukcióval (a tankönyvtől eltérő módon!) igazoltam az egyenlőtlenséget. Megnéztük az $n = 2$ esetet a rend kedvéért, és közben felhívtam a figyelmet, hogy ha a bizonyítandóból indulunk ki, akkor a végén meg kell nézni, hogy visszafele is igaz-e az okoskodás. Az indukciós lépésben az alábbi

$$A_{n+1}^{n+1} = \left(1 + \frac{A_{n+1}}{A_n} - 1\right)^{n+1} \cdot A_n^{n+1}$$

átalakításra volt szükségünk. A hatványra a Bernoulli-egyenlőtlenség ad alsó becslést, a másik tényezőre pedig az indukciós feltevést alkalmazhatjuk. Az indukciós lépésben az egyenlőség esetének végigkövetését nem részleteztem, ezt otthoni végiggondolásra hagytam.

Ezután rátértünk a halmazok témakörére. Megbeszéltük, hogy a halmaz és eleme alapfogalom, és milyen módon lehet megadni halmazokat. Feltettem azt a kérdést, hogy vajon $\{1, 1, 1\}$ és $\{1\}$ két különböző halmaz-e?. Kicsit meséltem arról is, hogy vigyázni kell a halmazok különböző tulajdonságokkal való definiálásával, példaként a borbély paradoxont (a borbélynak kötelező azokat borotválnia, akik nem maguk borotválkoznak, és másokat tilos borotválnia; de akkor a borbélyt ki borotválja?), a Berry-paradoxont („a legkisebb, 100-nál kevesebb szóval nem definiálható pozitív egész szám”) említettem.

Ezt követően megbeszélük (logikai jelekkel) halmazok egyenlőségét, tartalmazását, az üreshalmazt. Kicsit elidőztünk azon, hogy hány különböző üreshalmaz van („kék macskák” és a „beszélő majmok” halmaza vajon különböző-e?).

Majd jöttek a halmazműveletek: unió, metszet (ezeket értelmeztem két halmaz esetén, valamint tetszőleges A_i halmazokra, ahol $i \in I$ indexhalmaz), különbség, komplementer. Felírtam a különböző műveleti szabályokat (kommutatív, asszociatív, disztributív, ezeket csak szóban neveztem meg, valamint de Morgan-azonosságok).

Az óra végén előrevetítettem, hogy a következő alkalommal a valós szám fogalmát fogjuk tárgyalni. Középiskolás okoskodással „beláttuk”, hogy $0{,}99999\ldots = 1$. Ezután ugyanezzel az érveléssel „igazoltam”, hogy

$$1 + 2^2 + 2^3 + \ldots = -1,$$

ami nyilvánvalóan nem stimmel(?) (vagy legalábbis nem szeretnénk). Szükség van tehát a valós számok és a végtelen tizedes törtek precíz megalapozására. Elmondtam, hogy ezt konstruktív és axiomatikus módon is megtehetjük, mi az axiomatikus megközleítést fogjuk választani.