# Bevezető analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

**13. előadás (május 13.)**

A mai előadás témája a konvex (és konkáv) függvények voltak (de mindent csak a konvex esetben mondtunk ki). A grafikus motiváció után konvexnek neveztünk egy függvényt egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha az intervallum bármely $a, b, x$ pontjai esetén esetén igaz, hogy ha $a < x < b$, akkor $f(x) \le h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ (itt megjegyeztem, hogy $h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$ is helyes képlet, annak ellenére, hogy ránézésre nem ugyanaz). (Szemléletesen „a grafikon a húr alatt fekszik az $(a, b)$ intervallumon".) Egy függvényt konkávnak hívunk, ha $(-f)$ konvex, vagyis az előző definícióban az $f(x) \ge h_{a,b}(x)$ módosítást kell végrehajtani. Szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv egy függvény, ha az iménti egyenlőtlenségekben szigorú egyenlőtlenség érvényes. Felhívtam a figyelmet, hogy nem csupán a grafikon két végpontját összekötő húrt kell tekinteni, hanem az összeset! Ennek kapcsán még egy ellenpéldát is felrajzoltam, egy konvex függvényt „elrontottunk egy huplival".

Ezután példaképpen definíció szerint ellenőriztük (ami szemléletesen világos), hogy az $1/x$ függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on. Házinak adtam fel, hogy nézzük meg $\mathbb{R}^-$- on a konkávitást, valamint lássuk be, hogy az $x^2$ függvény konvex $\mathbb{R}$-en.

Egy kis grafikus motiváció után kimondtuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Az $f$ pontosan akkor konvex az $I$ intervallumon, ha bármely $a, b \in I$ és $0 < t < 1$ esetén

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b).$$

A $ta + (1-t)b$ kifejezést az $a, b$ pontok konvex kombinációjaként szokás emlegetni. A Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása a konvexitás definícióján múlik, egyszerűen az $x = ta + (1-t)b$ pontra kell alkalmazni (ennek kapcsán beláttuk, hogy $x$ éppen az $(1-t) : t$ arányú osztópontja az $[a, b]$ intervallummnak). Mindezek után kimondtam az általános Jensen-egyenlőtlenséget: ha $a_1, \ldots a_n \in I$ és $0 < t_1, \ldots, t_n < 1$, $t_1 + \cdots + t_n = 1$ (ezeket szokás súlyoknak hívni), akkor

$$f(t_1a_1 + \cdots + t_na_n) \le t_1f(a_1) + \cdots + t_nf(a_n),$$

és ez visszafele is igaz. A bizonyítás indukcióval történhet, de ezt kihagytuk.

A Jensen-egyenlőtlenségnek az $1/x$ függvényre való alkalmazásaként megkaptuk a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget, valamint az $x^2$ függvényre való alkalmazásaként a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget. Itt egy kicsit beszéltem általában a hatványközepek családjáról is.

Az óra maradék részében a konvexitás egy ekvivalens átfogalmazását tárgyaltuk. Az $f$ pontosan akkor konvex az $I$ intervallumon, ha minden $a \in I$ esetén az $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ meredekségfüggvény monoton növő az $I \setminus \{a\}$ halmazon. A bizonyítást kihagytuk, de a tételt rajzon szemléltettük.Ezután alkalmazásképpen igazoltuk, hogy az $x^n$ függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on minden $n$ pozitív egész esetén.