

# Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

## 12. előadás (május 6.)

Az óra elején a Cauchy-kritériumot tárgyaltuk, ami a konvergencia egy ekvivalens megfogalmazását adja: az  $(a_n)$  sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz található  $N$  küszöb, hogy minden  $n, m > N$  esetén  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ . Ez utóbbi tulajdonsággal rendelkező sorozatokat szokás Cauchy-sorozatnak hívni (tehát a tétel szerint egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat). A konvergenciából a Cauchy-tulajdonság egyszerűen következik a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával („ha  $a_n$  és  $a_m$  mindketten közel vannak a határértékhez, akkor egymáshoz is közel vannak”). A másik irány gondolata a következő (ezt csak vázoltam): ha  $(a_n)$  Cauchy, akkor korlátos, így a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint van konvergens részsorozata, de ekkor  $(a_n)$  is szükségképpen konvergens.

Ezzel a sorozatok témakörét lezártuk, és röviden előrevetítettem a folytatást (függvények jönnek egészen az integrálszámítás témakör végéig).

Ezután belekezdünk a függvények témakörbe. A függvény, leképezés, hozzárendelés szavak szinonímák. Egy  $f: A \rightarrow B$  függvény kapcsán megbeszéltük az értelmezési tartomány, értékkészlet fogalmakat és jelöléseiket. Ezt követően az injektív, szürjektív és bijektív tulajdonságokat definiáltuk és néztünk példát is (az  $f: A \rightarrow B, f(x) = x^2$  függvény különböző  $A, B$  valós számhalmazokkal). Injektív (vagy bijektív) függvény esetén értelmeztük az inverz fogalmát, amely  $f^{-1}: R(f) \rightarrow D(f)$ , és  $f^{-1}(b) = a$ , ha  $f(a) = b$ .

Megbeszéltük, hogy  $D(f) = \mathbb{N}^+$  esetén végtelen sorozatról beszélhetünk,  $D(f) = \{1, 2, \dots, n\}$  esetén pedig  $n$  tagú sorozatról. Speciálisan a kéttagú sorozatot szokás rendezett párnak hívni. Az  $A, B$  halmazokból képzett rendezett párok halmaza az  $A \times B$  Descartes-szorzat. Egy függvény grafikonja  $\text{graph } f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$ , amely részhalmaza  $A \times B$ -nek. Speciálisan  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvény esetén a grafikon a sík részhalmaza.

Rátértünk a valós függvényekre:  $D(f) \subset \mathbb{R}$  és  $R(f) \subset \mathbb{R}$ . Értelmeztük a függvények közötti műveleteket: összeg, különbség, szorzat, hányados és kompozíció. Definiáltuk az értelmezési tartományokat (például  $D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$ ) és a hozzárendelési szabályt (például  $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ ). Felhívtam a figyelmet, hogy a kompozíció művelete általában nem felcserélhető (házinak adtam példa kitalálását).

Az óra utolsó részében valós függvények különböző tulajdonságait ismételtük át. Az alábbi definíciók szerepeltek: páros, páratlan, periodikus függvény (itt példaképpen beláttuk, hogy a Dirichlet-függvénynek minden nemnulla racionális szám periódusa). Ezután következett az adott halmazon (szigorú) monoton növekedés (példaként az  $x^2$  függvényt mutattam a  $(0, \infty)$ -en) és a csökkenés definíciója (ezt házinak adtam), valamint az alulról és felülről korlátosság (példaként a törtrész-függvényt mutattam).

Zárásként belekezdünk a konvexitás fogalmába. Megbeszéltük az  $f$  függvény  $(a, f(a))$  és  $(b, f(b))$  pontjain átmentő húr egyenesének egyenletét. Következő órán a konvexitással foglalkozunk részletesen.