

Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

11. előadás (április 29.)

Folytattuk a nagyságrendek témakörét, egy segédállítás bizonyítására tértünk vissza, amelyet a múltkor elnapoltunk: ha $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, akkor $a_n \rightarrow 0$. Valójában azt láttuk be a bizonyítás során, hogy ha az (a_n) sorozathoz található olyan $q < 1$ szám, amelyre egy indextől kezdve $|a_{n+1}/a_n| < q$, akkor $a_n \rightarrow 0$. Mindez a rendőrelv segítségével jött ki. Ezután az aszimptotikus egyenlőség fogalmát értelmeztem: $a_n \sim b_n$, ha $a_n/b_n \rightarrow 1$. Például $2^n \sim 2^n + n^2$, hiszen $(2^n + n^2)/2^n = 1 + n^2/2^n \rightarrow 1$ a nagyságrendek miatt.

Ezt követően az előadás fő témája a monotonitás és határérték kapcsolata volt. Először definiáltam, hogy egy sorozat monoton növekedése és csökkenése, valamint szigorú monotonitása mit jelent. Ezután beláttuk, hogy minden monoton sorozatnak van véges vagy végtelen határértéke, pontosabban ha (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\} \in \mathbb{R}$; ha (a_n) monoton növekvő és felülről nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$; ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$; végül ha (a_n) monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor $\lim a_n = -\infty$ (a csökkenő esetek meggondolásást házi feladatnak adtam).

Alkalmazásként az $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ rekurzív sorozat határértékét kerestük meg. Indukcióval beláttuk, hogy monoton növekvő, majd igazoltuk, hogy (például) az 1000 egy felső korlátja. Ekkor a tétel szerint konvergencia, a rekurzióban elvégezhető a határátmenet, és a határértékre -1 vagy 2 adódik, amelyek közül a negatív kizárható, hiszen a_n nemnegatív sorozat, így a limesze is az (a limesz és egyenlőtlenségek kapcsolatáról szóló tétel alapján).

Második alkalmazásként az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot vizsgáltuk. A számtani és mértani közepek segítségével megmutattuk, hogy szigorúan monoton növekedő. Hasonlóan látható, hogy a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenő. Mivel $a_n < b_n$, ezért a_n felülről korlátos, b_n alulról korlátos (ráadásul $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$), tehát mindkettő konvergens. Sőt, a határértékük megegyezik, hiszen $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. A közös határérték a nevezetes $e \approx 2,7182$ szám, amely a későbbi félévekben még sokszor elő fog kerülni. Ízelítőként felírtam az Euler-féle $e^{i\pi} + 1 = 0$ formulát, valamint az $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ Stirling formulát.

Ezt követően a részsorozatok témája következett. Ha $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ pozitív egészek sorozata, akkor a $b_k = a_{n_k}$ sorozat az (a_n) sorozat egy részsorozata. A definíció alapján ismét könnyű látni, hogy ha (a_n) -nek a határértéke a (amely lehet véges vagy végtelen, akkor minden részsorozatának is ez a határértéke. Az óra vége felé a sorozatok témakörének „csúcspontjaként” A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt fogalmaztam meg: minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. A bizonyításhoz beláttuk, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata. Ennek igazolása a csúcs (házi elnevezés) segítségével történt. Az a_n csúcs tag a sorozatban, ha minden $m > n$ esetén $a_m < a_n$. Ha végtelen sok csúcs van, akkor azok szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak, véges sok csúcs esetén pedig nem nehéz monoton növekvő sorozatot találni: van olyan N , hogy minden $n > N$ esetén a_n nem csúcs, ekkor legyen például $a_{n_1} := a_{N+1}$; ha már a_{n_k} megvan, akkor mivel ő nem csúcs, ezért van olyan $n_{k+1} > n_k$, hogy $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$; ezzel egy monoton növekvő részsorozatot találtunk.