Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

10. előadás (április 15.)

A limesz és műveletek témakörben a reciprok műveletére tértünk rá. Beláttuk, hogy ha $b_n \to b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $1/b_n \to 1/b$; ha pedig $b_n \to \infty$ vagy $b_n \to -\infty$, akkor $1/b_n \to 0$. Megjegyeztem, hogy ha $b_n \to 0$, akkor $(1/b_n)$ kritikus limesz: $b_n = 1/n$ esetén $1/b_n = n \to \infty$, $b_n = -1/n$ esetén $1/b_n = -n \to -\infty$ és $b_n = (-1)^n/n$ esetén $1/b_n = (-1)^n n$ oszcillálva divergens. Itt megkérdeztem, hogy vajon miért nem beszéltem negyedik esetről, tehát előfordulhat-e, hogy $b_n \to 0$, és $(1/b_n)$ konvergens? Mivel definíció szerint $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$, ezért a hányados határértékéről szóló tételhez elég a reciprokot vizsgálni, utána alkalmazható a szorzásra vonatkozó tétel. Házinak feladtam, hogy írjuk fel a hányados limeszére vonatkozó táblázatot, és adjunk példákat a kritikus limeszekre. A téma lezárásaként felírtam a kritikus limeszeket: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 1^∞.

Ezután következett a határérték és egyenlőtlenségek témaköre. Kimondtam a fő tételünket, a rendőrelvet, amelyet három részre bontottam: 1. ha $a_n \le b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$; 2. ha $a_n \ge b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to -\infty$, akkor $b_n \to -\infty$; 3. ha $\lim a_n = \lim c_n = a$ (ahol a véges vagy végtelen) és egy küszöbtől kezdődően $a_n \le b_n \le c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n = a$. Példaként meghatároztuk az $\sqrt[n]{10^n + (-1)^n}$ sorozat limeszét. Ebben a témakörben még egy tételt mondtam ki: ha (a_n) és (b_n) konvergensek, akkor

$$\exists N\ \forall n > N : a_n \le b_n \quad \begin{smallmatrix}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{smallmatrix} \quad \lim a_n \le \lim b_n,$$

$$\exists N\ \forall n > N : a_n < b_n \quad \begin{smallmatrix}\not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow\end{smallmatrix} \quad \lim a_n < \lim b_n.$$

A szigorú egyenlőtlenségre vonatkozó következtetést igazoltuk először, és ebből már adódott a másik következtetés. Ahol a következtetések nem igazak, ott a 0 és $1/n$ sorozatok megfelelő szereposztásban jók ellenpéldaként.

Ezt követően a nagyságrendek témakörét tárgyaltuk. Motivációként felírtam az n^k (k pozitív egész), a^n ($a > 1$), $n!$ és n^n sorozatokat, és azt a kérdést tettem fel, hogy melyik tart gyorsabban a végtelenhez. Az n^k típusú sorozat növekedését korábban polinomiálisnak, az a^n ($a > 1$) növekedését exponenciálisnak hívtam. Rögtön definiáltam, hogy mit is értünk nagyságrend alatt: ha $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, akkor (a_n) gyorsabban tart végtelenhez, mint (b_n), amennyiben $b_n/a_n \to 0$ (vagy most(!) ekvivalensen $a_n/b_n \to \infty$). Bevezettem minderre a $b_n \prec a_n$ (vagy $b_n \ll a_n$) jelölést és tételként kimondtam, hogy $a > 1$, $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ esetén $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$. Mivel $n!/n^n \le 1/n$, így $n!$-nál gyorsabban tart végtelenhez n^n. A másik két nagyságrendhez egy segédállítást mondtam ki: ha $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, akkor $a_n \to 0$. A segédállítást az n^k/a^n és $a^n/n!$ ($k > 0$ egész és $a > 1$ valós) sorozatokra alkalmaztuk, és igazoltuk ezzel, hogy 0-hoz tartanak. A jövő órán a segédállítás bizonyításával kezdjük.