Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2019. tavasz

1. előadás (február 11.)

Az óra elején megszavaztuk, hogy 16:00-kor kezdünk, és 45 perc után tartunk egy 5 perces szünetet, így 17:35-ig tart az óra. Ezután röviden elmondtam az előadással kapcsolatos legfontosabb információkat (számonkérés, jegyzet stb.); minden részletesen elolvasható az `abesenyei.web.elte.hu` oldalon. A gyakorlatokról alig mondtam valamit, arról majd a gyakorlatvezetők beszélnek. A bevezető rész végén még a tematikáról is ejtettem szót, valamint a későbbi félévek analízis tárgyait szintén megemlítettem. Végül felolvastam egy rövid idézetet arról, hogy miért kell olyasmit is tanulni, ami első ránézésre feleslegesnek tűnik. (A második 45 perc elején is felolvastam egy lelkesítőnek szánt szöveget.)

Ezután belevágtunk a logika témakörébe. Kicsit beszéltem arról, mi a logika („a helyes következtetések tudománya”), és megemlítettem, hogy a matematikában a logika és a józan ész segítségével alapigazságokból tételeket vezetünk le (bizonyítunk). Megbeszéltük, hogy logikai állításon olyan kijelentést értünk, amelynek az igazságértéke egyértelműen eldönthető, majd rátértünk a logikai műveletekre ($\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$), amelyekkel állításokból újabb állításokat készíthetünk. Pontosan definiáltuk az így gyártott állítások mindegyikének igazságértétét (vagyis, hogy mikor igaz és mikor hamis). Az $A \vee B$ kapcsán felhívtam a fogyelmet, hogy a matematikában a „vagy” mindig megengedő és nem kizáró. Humoros példaként a jól ismert „Ön dönt, iszik vagy vezet.” felhívást idéztem, amelyet a hétköznapokban máskép értelmezünk (egyszerre nem engedjük meg az ivást és a vezetést is), mint a matematikában (itt megengedjük, hogy a vagy kapcsolat mindkét tagmondata igaz legyen). Az $A \implies B$ következtetés ürügyén pedig egy kicsit elidőztünk azon, hogy a „Hamis állításból minden következik.”, amelynek illusztrációjaként szóban bebizonyítottam, hogy „ha $1 = 2$, akkor én vagyok a pápa” (szerencsére $1 \neq 2$).

Ezt követően megbeszéltük a különböző logikai műveletek és a tagadás kapcsolatát, ezek az úgynevezett de Morgan-féle azonosságok, pl. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ (de Morgannel kapcsolatban házi feladatként feladtam, hogy vajon mikor születhetett, ha egyszer az életkorát kérdezőknek azt válaszolta, hogy „x éves voltam az x^2 évben”).

Következett ezután a nyitott mondat „fogalma” (olyan állítás, amelynek igazságértéke egy vagy több változótól függ), majd bevezettük az univerzális ($\forall$) és egzisztenciális ($\exists$) kvantorokat, és megbeszéltük az igazságértéküket, tagadásukat: $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$, $\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$, $\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$. Végül megjegyeztem, hogy ha egy $A(x) \implies B(x)$ típusú állítást látunk, akkor általában odaértjük elé, hogy minden x-re (és így a tagadása úgy fog kezdődni, hogy van olyan x, amelyre...).

Rátértünk ezt követően a bizonyítási módszerekre, először az indirekt bizonyítás menetét néztük meg. Példaképpen a $\sqrt{2}$ irracionalitását igazoltam, de nem az elcsépelt bizonyítással, hanem a következőt mondtam el (itt csak nagyon tömören vázolom): indirekt, legyen q a legkisebb pozitív egész szám, amelyre $\sqrt{2} = p/q$ egész. De akkor $\sqrt{2} = (2q - p)(p - q)$, ahol $p - q$ is pozitív egész, amely ráadásul kisebb, mint q, ami ellentmond q minimalitásának.

Majd jött a teljes indukció legegyszerűbb formája: ha A_1 igaz, és $\forall n(A_n \implies A_{n+1})$, akkor ezzel beláttuk, hogy $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mind igazak.