

Bevezető analízis 2. vizsgatematika

Osztatlan matematikatanár szak, 2019. tavasz

Tudnivalók a vizsgáról. A vizsgára a Neptunban kell jelentkezni, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsga előtti napon a Neptunon keresztül üzenetben küldök vizsgabeosztást. A vizsgára kényelmes ruhában érdemes jönni, nem kell kiöltözni. Személyazonosító igazolványt mindenki hozzon magával! Konzultációt nagyon szívesen tartok (általában a vizsgát megelőző nap délutánján 15 órától), kérem, hogy emailben előzetesen jelentkezzen, aki szeretne jönni. Bármilyen probléma vagy kérdés esetén tessék nyugodtan emailt írni.

A vizsgán ezen a tematikán kívül semmilyen segédeszköz nem használható, üres lap viszont legyen mindenkinél (a lapot aláírom, csak ezt követően lehet rajta dolgozni). A vizsga megkezdésekor mindenki egy feladatot és mellé párosítva két tételt húz (amelyek a tételsor három különböző részét fedik le), majd 1 óra felkészülési időt kap. Az elégséges jegy feltétele a **feladat megoldása** (esetleg apróbb segítséggel), a **definíciók és tételek pontos kimondása és értése** (ezt egyszerű kérdésekkel konkrét példákon könnyű ellenőrizni), a **bizonyítások alap gondolatának és főbb lépéseinek ismerete**, továbbá a **húzottaktól eltérő tételekből szűrőpróbaszerűen feltett kérdésekre való helyes válaszadás** (e kérdések is definíciók, tételek, ellenpéldák ismeretét és értését ellenőrzik).

Vizsgakérdések.

1. Logikai állítások, logikai műveletek, azonosságok. Nyitott mondatok, kvantorok, tagadás. Indirekt bizonyítás, $\sqrt{2}$ irracionálisága. Teljes indukció. Bernoulli-egyenlőtlenség.
2. Számítani, mértani, harmonikus közép, a „közép” elnevezés magyarázata, a közepek közötti egyenlőtlenség. Halmazok megadása, egyenlősége, részhalmaz, üreshalmaz. Halmazműveletek, azonosságok.
3. A valós számok konstruktív és axiomatikus megalapozásainak jelentése. A testaxiómák és néhány következményük: az ellentett és reciproklétezés, 0-val és (-1) -gyel való szorzás.
4. A rendezési axiómák. Pozitív, negatív számok. Intervallumok. Abszolút érték, háromszög-egyenlőtlenség. A $0 < 1$ egyenlőtlenség. Pozitív egészek, egészek, racionális, irracionális számok.
5. Az arkhimédészi axióma. Bármely két különböző valós szám között van racionális szám. Egymásba skatulyázott intervallumok, Cantor-axióma, a $(0, 1/n)$ alakú intervallumok metszete.
6. A négyzetre emelés monotonitási tulajdonsága. Négyzetgyök és n -edik gyök létezése.
7. Véges és végtelen tizedes törtek. Nemnegatív számok végtelen tizedes tört alakjának létezése, az egyértelműség kérdése. Minden végtelen tizedes tört alak egyértelműen meghatároz egy valós számot.
8. Halmazok maximuma és minimuma, példák. Halmazok felső és alsó korlátja, felülről korlátos és alulról korlátos halmazok, példák.
9. A teljességi tétel. Halmazok szuprémuma és infimuma a korlátos és nem korlátos esetekben, példák.
10. Hatványozás egész kitevők esetén, azonosságok. Kiterjesztés racionális kitevőkre, a definíció értelmessége. A hatványozás monotonitási tulajdonsága a racionális kitevőjű esetben.
11. Hatványozás értelmezése valós kitevők esetén: motiváció, definíció és az ahhoz szükséges tétel. A kiterjesztés racionális kitevő esetén megegyezik a korábbi értelmezéssel. A hatványozás azonosságai.
12. Sorozatok különféle megadása, példák. A konvergencia ekvivalens definíciói, példák. A határérték egyértelműsége.
13. Végtelenhez tartó és mínusz végtelenhez tartó sorozatok, ekvivalens definíciók, példák. Oszcillálva divergens sorozatok, példák.
14. Határérték és korlátosság kapcsolata. Néhány nevezetes sorozat határértéke: n^k , a^n , $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$.
15. Összeg- és szorzatsorozat határértéke, kritikus esetek, példák.

16. Reciprok- és hányadosorozat limesze, kritikus határértékek, példák.
17. A rendőrelv különböző esetei, példa. Sorozatok közötti egyenlőtlenség öröklődése a határértékekre és megfordítva, ellenpéldák.
18. A nagyságrend fogalma. Elégséges feltétel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ teljesüléséhez, az n^k/a^n , $a^n/n!$, $n!/n^n$ sorozatok határértéke. Aszimptotikus egyenlőség, példa.
19. Monoton sorozat határértéke. Példa rekurzív sorozat határértékének kiszámítására. Az $(1 + 1/n)^n$ és $(1 + 1/n)^{n+1}$ sorozatok, az e szám.
20. Részsorozat határértéke. Monoton részsorozat létezése, Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. Cauchy-kritérium.
21. Függvény értelmezési tartománya, értékkészlete, grafikonja. Injektív, szürjektív, bijektív függvények, példák. Inverzfüggvény. Műveletek valós függvények között. Függvények tulajdonságai: páros, páratlan, periodikus, korlátos, monoton függvények, példák, a Dirichlet-függvény periódusai.
22. Konvex, konkáv függvények: definíció, példák. Jensen-egyenlőtlenség, alkalmazás a nevezetes közepekre. A konvexitás egy ekvivalens jellemzése, alkalmazás a hatványfüggvényekre.