Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2019. ősz

9. előadás (november 12.)

Az előadás elején újra felírtam a parciális derivált definícióját a kétváltozós esetben. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$ (ahol $H \subset \mathbb{R}^2$) és $(a,b) \in \operatorname{int} H$, ekkor az f-nek létezik az (a,b) pontban az első változós szerint parciális deriváltja, ha

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \in \mathbb{R},$$

más szóval az $x \mapsto f(x,b)$ szekciófüggvény deriválható a-ban. Ekkor az iménti határérték az első változó szerinti parciális derivált, amelyre én a $\partial_1 f(a,b)$ jelölést fogom használni (de temérdek jelölés van használatban, amelyek közül fel is írtam párat). A második változó szerinti parciális deriváltat hasonlóan értelmeztük, jele $\partial_2 f(a,b)$.

Rögtön néztünk példákat: ha $f = 1$ a tengelyeken és 0 másutt, akkor $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$; ha $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ az origó kivételével, ahol $f = 0$, akkor ugyancsak $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$. Megjegyeztük, hogy mindkét példa mutatja, hogy a parciális deriváltak létezése nem elegendő az adott pontbeli folytonossághoz (be is láttuk, hogy az előbbi két függvény nem folytonos az oirgóban).

Definiáltuk ezután a p változós esetben a parciális derivált fogalmát. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$, ahol $H \subset \mathbb{R}^p$, ekkor azt mondjuk, hogy az $a \in \operatorname{int} H$ pontban létezik az f függvény j-edik változó szerint parciális deriváltja, ha az $x_j \mapsto f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_p)$ szekciófüggvény differenciáható az a_j pontban, azaz:

$$\exists \lim_{x_j\to a_j} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_p)-f(a_1,\dots,a_p)}{x_j-a_j} \in \mathbb{R}.$$

Ezt követően a totális differenciálhatóság fogalmának értelmezését tűzük ki célul. Ennek érdekében felidéztem az egyváltozós differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazását (ezt több lépésen keresztül kaptuk):

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} \frac{|f(x)-f(a)-\alpha(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

Arról van szó, hogy az a pont körül az $f(x)$ „jól közelíthető” az $y = f(a)+\alpha(x-a)$ lineáris függvénnyel – ez éppen az $(a, f(a))$ ponton átmenő érintő egyenesének egyenlete – abban az értelemben, hogy a maradéktag még a 0-hoz tartó $|x-a|$ kifejezéssel leosztva is 0-hoz tart. Megbeszéltük, hogy két változóban érintő egyenes helyett érintő síkot veszünk (bármi is az egyelőre). Mivel az $(a,b,f(a,b))$ ponton átmenő síkok $z = f(a,b)+\alpha_1(x-a)+\alpha_2(y-b)$ egyenlettel írhatók le, ezért máris kézenfekvő a következő definíció. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$ (ahol $H \subset \mathbb{R}^2$) és $(a,b) \in \operatorname{int} H$; ekkor f totálisan differenciálható az (a,b) pontban, ha

$$\exists \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} : \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x,y)-f(a,b)-\alpha_1(x-a)-\alpha_2(y-b)|}{|(x,y)-(a,b)|} = 0.$$

Megjegyeztük, hogy az iménti hányados számlálójában az abszolút érték elhagyható (de később vektorértékű függvény esetében nem!), viszont a nevezőbeli abszolútérték lényeges (mert vektorokkal nem oszthatunk). A totális jelző gyakran elhagyható, mert többváltozós esetben a differenciálható szó mindig a totális differenciálhatóságot jelenti; a parciális jelző sosem hagyható el.

Beláttuk, hogy ha f totálisan differenciálható (a,b)-ben, akkor ott léteznek a parciális deriváltjai, és a definícióban szereplő α_1,α_2 számokra $\alpha_1 = \partial_1 f(a,b)$ és $\alpha_2 = \partial_2 f(a,b)$ teljesül. Rögtön mutattunk egy példát, hogy ez visszafelé nem igaz: ha $f = 1$ a tengelyeken és $f = 0$ másutt, akkor az origóban léteznek a parciális deriváltak, de ott f nem differenciálható (ez utóbbit a totális differenciálhatóság definíciója alapján, az átviteli elv segítségével igazoltuk). Ezt a példát egy tétel segítségével is elintézhettük volna, és ehhez megmutattuk, hogy a differenciálhatóságból következik az adott pontbeli folytonosság. Tanulság tehát, hogy

$$f \text{ totális differenciálható } (a,b)\text{-ben} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad \exists \partial_1 f(a,b) \text{ és } \exists \partial_2 f(a,b).$$

Az (a, b) pontban differenciálható f esetén bevezettük az (a, b) pontbeli derivált(vektor), más szóval gradiens(vektor) fogalmát, amely az $f'(a, b) = (\partial_1 f(a, b), \partial_2 f(a, b)) \in \mathbb{R}^2$ (általában sorvektor). További jelölés szokott lenni: $\operatorname{grad} f$ vagy ∇f (ejtsd: nabla ef).

Az órán utolsó példaként megnéztük az $f(x, y) = xy$ függvény differenciálhatóságát a $(2, 3)$ pontban. Definíció szerint beláttuk, hogy f totálisan differenciálható a $(2, 3)$ pontban és $f'(2, 3) = (3, 2)$.