Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

7. előadás (március 26.)

Az órát azzal a megjegyzéssel kezdtem, hogy az integrált úgy is fel lehet építeni, hogy először téglán értelmezzük, majd tetszőleges mérhető halmazon. Téglán elég rácstéglákból álló felosztást tekinteni, pontosabban $T = [a, b] \times [c, d]$ esetén elegendő az egydimenziós $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ és $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = d$ felosztásokból adódó $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ téglák alkotta kétdimenziós felosztást venni. Ekkor tulajdonképpen a mérhetőség fogalma is kikerülhető, csak tégla területére van szükség. Az integrálnak tégláról tetszőleges mérhető halmazra való kiterjesztéséhez pedig egy órai tétel nyújthat segítséget.

Ezek után az óra első felében végigmentünk az egyváltozós integrál kapcsán megismert tételeknek a kétváltozós megfelelőin (bizonyítás nélkül, mert – értelemszerű módosításokkal – szinte szóról szóra átültethető az egyváltozós eset gondolatmenete). Először az integrálnak a műveletekkel és egyenlőtlenséggel való kapcsolatáról szóló tételeket mondtuk ki. Ha f és g integrálhatók az A mérhető halmazon, akkor $f + g$ és λf is integrálható (ahol $\lambda \in \mathbb{R}$), továbbá $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$ és $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$. Ha $f \leq g$ teljesül az f, g integrálható függvényekre az A halmazon, akkor $\int_A f \leq \int_A g$.

Ezt követte az integrál additivitása. Ha f integrálható az A és B mérhető, egymásba nem nyúló halmazokon, akkor az uniójukon is integrálható és $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$. Arról van szó, hogy az $\alpha\colon A \mapsto \int_A f$ hozzárendelés egy additív halmazfüggvényt definiál (amennyiben például f minden mérhető halmazon integrálható), azaz A és B mérhető, egymásba nem nyúló halmazok esetén $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B)$. (A Jordan-mérték is egy ilyen függvény, és nemsokára látjuk, hogy az integrál és a mérték egymással szoros kapcsolatban áll.) Az additivitás alkalmazásaként beláttuk, hogy ha $H \subset T$, ahol H mérhető és T tégla, akkor tetszőleges $f\colon H \to \mathbb{R}$ integrálható függvényt a H halmazon kívülre 0-ként kiterjesztve $\int_H f = \int_T \tilde{f}$ (itt $\tilde{f}$ a kiterjesztett függvényt jelöli). Ez utóbbi állítás segítségével lehet téglán vett integrál és mérhető halmazon vett integrál között kapcsolatot teremteni – az első szakaszban erre vonatkozott az utalás. Ebben a szakaszban végül még kimondtam azt is, hogy ha f integrálható az A mérhető halmazon, akkor annak bármely mérhető részhalmazán is integrálható.

Ezután megfogalmaztam az integrálhatóság „hasznos kritériumát”. Az f korlátos függvény pontosan akkor integrálható, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan F felosztás, amelyre $S_F - s_F < \varepsilon$. Az $\Omega_F := S_F - s_F$ különbséget szokás oszcillációs összegnek hívni.

Rátértünk a folytonos függvények integrálhatóságára: ha H korlátos, zárt, mérhető halmaz és f folytonos H-n, akkor ott integrálható is. A bizonyítás – az egyváltozós esethez hasonlóan – a hasznos kritériumon és Heine tételén múlik: korlátos, zárt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos. Itt emlékeztettem az egyenletes folytonosság szemléletes jelentésére, majd fel is írtam a definíciót (bár nem fogjuk használni): bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Itt még megjegyeztem, hogy nem szükséges f-nek az egész korlátos, zárt, mérhető halmazon folytonosnak lennie, elég ha ez egy nullmértékű halmaz kivételével teljesül (és f korlátos természetesen).

Az óra első felének utolsó rövid szakasza a mérték és integrál kapcsolatáról szólt. Definiáltuk halmaz karakterisztikus függvényét: $\chi_H = 1$ a H halmazon és 0 azon kívül. Ekkor ha H korlátos (de mérhetőség most nincs feltéve) és $H \subset T$, ahol T tégla, akkor $b(H) = \underline{\int_T} \chi_H$, valamint $k(H) = \overline{\int_T} \chi_H$. A belső és külső mérték tehát valójában integrálként áll elő.

Végül a háromdimenziós normáltartomány térfogatára vonatkozó tételt írtam fel: ha $f\colon H \to \mathbb{R}$ integrálható és nemnegatív, akkor az $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in H,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ halmaz (normáltartomány) mérhető és a térfogata $\int_H f$.

Az előadás második felének témaköre az integrál kiszámítása volt. Eddig egyetlen tétel sem szólt arról, hogyan lehetne (alsó, felső és egyéb összegek nélkül) konkrét kétváltozós integrálokat kiszámolni. Egy változóban ott van a Newton–Leibniz-tétel, ám itt ilyen nincs. Helyette az integrált két egyváltozós integrál egymás után való elvégzésére lehet visszavezetni. Erről szól a szukcesszív integrálás tétele, más néven a lebontási tétel. Ha f integrálható a $T = [a, b] \times [c, d]$ téglán, akkor

$$\begin{aligned}\int_T f = \int_a^b \left(\overline{\int_c^d} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\underline{\int_c^d} f(x, y)\, dy \right) dx = \\ = \int_c^d \left(\overline{\int_a^b} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d \left(\underline{\int_a^b} f(x, y)\, dx \right) dy.\end{aligned}$$

Megnéztük a bizonyítást, legalábbis az első egyenlőségét.

Ezután alkalmazások következtek. Kiszámoltuk az $\int_{[0,1]\times[0,1]} x$ integrált. Folytonos függvényről és korlátos, zárt, mérhető halmazról lévén szó, alkalmazható a lebontási tétel:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} x = \int_0^1 \int_0^1 x\, dy\, dx = \int_0^1 [xy]_{y=0}^1\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Következő alkalmazás volt a kétdimenziós normáltartományon vett integrál. Először a függvényt kiterjesztettük 0-ként a tartományon kívülre, és a lebontási tétel segítségével végül az

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

szukcesszív integrál adódott, ahol a normáltartományt a $\varphi_1 \leq \varphi_2$ integrálható függvények határozzák meg az $[a, b]$ intervallum felett (és f elég „szép”, hogy ne kelljen alsó/felső integrálokat írni). Konkrét példaként kétféle sorrendben is felírtuk a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(1, 1)$ pontok által meghatározott H háromszöglapon vett integrált:

$$\int_H f = \int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y)\, dx\, dy.$$

Végül egy szép alkalmazásként kiszámoltuk az $\int_0^1 (x-1)/\log x\, dx$ integrált. Először észrevettük, hogy – bár látszólag improprius integrálról van szó, azonban – az integrandus folytonosan kiterjed a $[0, 1]$ intervallumra. Az integrál értékének meghatározására a döntő ötlet az volt, hogy $(x - 1)/\log x = [x^y/\log x]_{y=0}^1$, így

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^y}{\log x}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^y}{\log x}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y+1}\, dx = \log 2.$$

A lebontási tétel most azért alkalmazható, mert az x^y függvény korlátos az egységnégyzeten és a $(0, 0)$ pont kivételével folytonos.