Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

6. előadás (március 19.)

Az óra elején még visszatértem a Cantor-halmazra egy érdekesség kedvéért, ez volt „az ördög lépcsője". Mese szinten értelmeztem egy $[0,1] \to [0,1]$ függvényt, amely a Cantor-halmaz minden egyes komplementer intervallumán konstans, a Cantor-halmazon pedig úgy van értelmezve, hogy a $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ hármas számrendszerbeli számhoz egy kettes számrendszerbeli számot rendel a 2-es jegyeket 1-esre cserélve. Láttuk például, hogy $1/3 = 0{,}022\ldots$ és $2/3 = 0{,}200\ldots$ képe egyaránt $1/2 = 0{,}100\ldots$, és hasonló igaz az összes elhagyott intervallumra. Az ördög lépcsője tehát egy olyan függvény, amely monoton növő, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, de egy nullmértékű halmaztól (a Cantor-halmaztól) eltekintve a deriváltja 0.

A mese után a háromdimenziós Jordan-mérték témaköre következett. Értelmeztük a téglát, $R = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$, ahol $a_j < b_j$ minden j-re. Tégla esetén legyen $t(R) := (b_3-a_3)(b_2-a_2)(b_1-a_1)$. Innen a belső és külső Jordan-mérték (térfogat) felépítése analóg az 1 és 2 dimenziós esettel, ezt nem részleteztem. A korábban megismert 1)–4) tulajdonságok ismét teljesülni fognak, és a mérhető halmazok halmazgyűrűt alkotnak.

Ezután bevezettük tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^3$ halmaz z magasságú szekcióját:

$$H^z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in H\}.$$

(Hasonló módon értelmezhető a másik két koordinátasíkkal párhuzamos szekció.) A szekcióterületek integráljaként megkaphatjuk mérhető halmaz térfogatát: ha $H \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ mérhető, akkor

$$t_3(H) = \int_{a_3}^{b_3} b_2(H^z)\, dz = \int_{a_3}^{b_3} k_2(H^z)\, dz.$$

Itt a tételbe – amelyet nem bizonyítottam – bele van kódolva, hogy a szekciók külső és belső mértékének függvényei integrálhatók. A tétel természetesen igaz a többi szekcióval is, ezeket ki-ki magának felírhatja gyakorlásként. Alkalmazásképpen kiszámoltuk a következő térfogatokat:

- körhenger: $B((0, 0), r) \times [0, m]$; a szekciók az alaplap sugarával megegyező sugarú körlapok. A henger mérhetősége abból – az általam csak most megemlített, de nem bizonyított – eredményből következik, hogy korlátos konvex halmaz mérhető. Itt emlékeztettem halmaz konvexitásának definíciójára. Végül megkaptuk a középiskolás $r^2\pi m$ képletet.

- forgástest: az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, integrálható függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest $\{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$; az yz síkkal párhuzamos szekciók ismét körlapok, sugaruk $f(x)$, így a térfogat $\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$. (A mérhetőséget nem láttuk be, csak utaltam arra, hogy beírt és körülírt hengerekkel igazolható, ilyet láttunk egyváltozós analízisből.)

- körkúp: adott az xy síkon egy körlap és a térben egy c pont, ekkor a c csúcsú körkúp a $[c, u]$ szakaszok uniója, ahol u befutja a körlapot; ekkor a z magasságú szekciók körlapok, amelyek sugara hasonlóság segítségével számolva $r(m - z)/m$, ahol m a kúp magassága. Innen a térfogat a középiskolás képlet (az integrálást házinak adtam): $r^2\pi m$.

A szekciókról szóló tétel egy következménye a Cavalieri-elv: ha A és B mérhető halmazok úgy, hogy minden z esetén $t_2(A^z) = t_2(B^z)$, akkor $t_3(A) = t_3(B)$ (kártyapaklira érdemes gondolni, amelynek lapjait vízszintesen elmozdítottuk). Egy szép alkalmazás a félgömb térfogatának meghatározása. Megmutattuk, hogy az R sugarú körlap alaplapú és R magasságú hengerből elhagyva egy ugyanolyan alapú és magasságú „fejjel lefelé állított" kúpot, a kapott halmaz z magasságú szekciójának (ez körgyűrű) területe éppen $\pi(R^2 - z^2)$, ami a félgömb z magasságú szekciójának (amely egy körlap) területe. Így a félgömb térfogata a henger térfogata mínusz a kúp térfogata, vagyis $2R^3\pi/3$ (tehát a gömbé $4R^3\pi/3$).

Itt még megemlítettem, hogy ezt Arkhimédész kiegyensúlyozás segítségével írta fel (ez volt Arkhimédész sokat emlegetett „módszere"): a félgömb egyes szekcióit milyen alakzattal lehet kiegyensúlyozni (a forgatónyomatékok figyelembe vételével). Ezzel a Jordan-mérték témakörét lezártuk.

Ezek után a kétváltozós függvény integráljába kezdtünk bele. Az egyváltozós integrál felépítésének lépéseire való rövid visszatekintés után értelmeztük a szükséges fogalmakat. Egy mérhető H halmaz felosztása: $F = \{H_1, \dots, H_k\}$, ahol H_i mérhető, nemüres és egymásba nem nyúlóak, amelyek uniója a H halmaz. Adott $f\colon H \to \mathbb{R}$ korlátos(!) függvény és a H halmaz egy F felosztása esetén értelmeztük az f függvény F felosztáshoz tartozó alsó és felső összegét:

$$s_F := \sum_{i=1}^{k} \inf_{H_i} f \cdot t(H_i), \qquad S_F := \sum_{i=1}^{k} \sup_{H_i} f \cdot t(H_i).$$

A korlátosság miatt mindkettő valós szám, és világos módon $s_F \leq S_F$. Ennél több is igaz, meggondoltuk, hogy $s_F \leq S_G$ bármely F, G felosztásokra. Ehhez a felosztásokban szereplő halmazok páronkénti metszeteiből álló K felosztást tekintettük, majd a szűkebb halmazon vett infimumnak/szuprémumnak a bővebb halmazon vett infimummal/szuprémummal való kapcsolatából láttuk, hogy $s_F \leq s_K$ és $S_K \leq S_G$.

Ebből következően az alsó összegek halmaza felülről korlátos, a legkisebb felső korlátot neveztük f alsó integráljának (jele: $\underline{\int_H} f$); a felső összegek halmaza alulról korlátos, a legnagyobb alsó korlátja az f felső integrálja (jele: $\overline{\int_H} f$). Az f függvény integrálható, ha az alsó és felső integrálja megegyezik, ekkor ez a közös érték $\int_H f$.

Példaképpen láttuk, hogy az egységnégyzeten nem integrálható az a függvény, amely a racionális koordinátákkal rendelkező pontokban 1 értéket vesz fel, másutt pedig 0 értéket. Egy másik példa a c konstansfüggvény volt: tetszőleges mérhető halmazon integrálható és az integrálja $c \cdot t(H)$.