Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

4. előadás (március 5.)

Az óra elején emlékeztetőül felírtam minden definíciót az előző előadásról: tégla, t(tégla), $k(H)$, $b(H)$, $\mathcal{K}_n$, $k_n(H)$, $b_n(H)$, mérhetőség.

Ezek után egy példával folytattuk. Beláttuk, hogy a $H = \{(x, y) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq 1\}$ „racionális fésű" nem Jordan-mérhető. Ezt úgy igazoltuk, hogy egyrészt $b(H) = 0$, mert nincs belső pontja (tavaly ilyesmi szerepelt gyakorlatokon), másrészt kiszámoltuk a k_n mennyiséget, ahonnan határátmenettel $k(H) = 1$ adódott.

Ezt követően néhány észrevételt tettünk: 1) a t terület nemnegatív a definícióból adódóan, hiszen $0 \leq b$ is igaz; 2) $k(H) = k(\operatorname{cl} H)$ és $b(H) = b(\operatorname{int} H)$. Ez utóbbi két összefüggés azokból a – tavaly és idén sem bizonyított – ponthalmazelméleti összefüggésekből következik, miszerint a lezárt lezártja önmaga (tehát a lezárt lezártjába belemetsző kis négyzetek ugyanazok, mint a lezártba belemetszők), valamint halmaz belsejének belseje önmaga (tehát a halmaz belsejének belsejében ugyanazok a kis négyzetek vannak, mint a halmaz belsejében), így $k_n(H) = k_n(\operatorname{cl} H)$ és $b_n(H) = b_n(\operatorname{int} H)$, ahonnan határátmenettel adódik a szóban forgó észrevétel.

Itt kellett volna még egy harmadik észrevételt tennem (amit elfelejtettem, és sajnos csak később szúrtam be, amikor észbe kaptam), mégpedig minden $T = [a, b] \times [c, d]$ tégla mérhető és a területe az a $t(T) = (b - a)(d - c)$ érték, amelyet a legelején bevezettünk (de akkor csak magunkban gondoltuk területnek). Ez azon múlt, hogy a téglát saját magával fedve a $\{\sum_{j=1}^{\ell} t(T_j)\}$ halmazban megjelenik $(b-a)(d-c)$, így az infimum, $k(T)$ legfeljebb ekkora. Hasonlóan, a T téglába saját magát írva $b(T) \leq (b - a)(d - c)$, így $b(T) \leq k(T)$ figyelembe vételével szükségképpen $k(T) = b(T) = (b - a)(d - c)$.

Rátértünk a terület fontos tulajdonságára, az additivitásra. Beláttuk, hogy korlátos halmaz esetén a külső terület szubadditív, vagyis $k(A \cup B) \leq k(A) + k(B)$. Ez a k_n-re vonatkozó megfelelő állításból következett. Utóbbiban felhasználtuk, hogy $\operatorname{cl}(A \cup B) \subset \operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)$, ezért az A lezártjába vagy B lezártjába belemetsző kis négyzetek összdarabszáma legalább akkora, mint az unió lezártjába belemetsző kis négyzetek száma. Ezután a belső terület szuperadditivitása következett: ha A és B korlátosak és egymásba nem nyúlóak, akkor $b(A \cup B) \geq b(A) + b(B)$. Itt rögtön megjegyeztük, hogy az egymásba nem nyúló feltétel lényeges, különben $A = B \neq \emptyset$ triviális ellenpéldát szolgáltatna. A szuperadditivitás bizonyítása a b_n mennyiségre vonatkozó analóg összefüggésből adódott, és ez utóbbi pedig azon múlt, hogy $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$, ahol a jobb oldali unió diszjunkt halmazokból áll, így az $A \cup B$ belsejébe eső kis négyzetek száma legalább akkora, mint az A belsejébe vagy B belsejébe eső kis négyzetek összdarabszáma.

A szub- és szuperadditivitás következménye a Jordan-terület additivitása, vagyis A és B mérhető, egymásba nem nyúló halmazok esetén $A \cup B$ is mérhető és $t(A \cup B) = t(A) + t(B)$. Ez egy egyszerű egyenlőtlenségláncolaton múlt.

A terület tulajdonságai közül a következő az eltolásinvariancia volt. Adott H halmaz és v vektor esetén bevezettük a $H + v = \{x + v : x \in H\}$ eltolt halmazt. Ekkor ha H mérhető, akkor $H + v$ is mérhető és $t(H + v) = t(H)$. A bizonyítás egyszerűen azon múlt, hogy tégla eltoltja tégla, sőt a területe sem változik (ezt a számolást konkrétan megnéztük), így a $k(H)$ és $k(H + v)$, valamint a $b(H)$ és $b(H + v)$ mennyiségek definíciójában szereplő számhalmazok (amelyek szuprémumát/infimumát vesszük) megegyeznek.

Mindezek után összefoglaltuk a terület négy fontos tulajdonságát, amelyet a témakör bevezetőjében már motivációként felsoroltunk: nemnegativitás, additivitás, eltolásinvariancia és normáltság (azaz $t([0, 1] \times [0, 1]) = 1$). Megjegyeztem, hogy ha a mérhető halmazokon egy m függvény rendelkezik az iménti négy tulajdonsággal, akkor szükségképpen $m = t$. Azt is hozzáfűztem még a tulajdonságokhoz, hogy a terület valójában tetszőleges egybevágóságra (azaz $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ távolságtartó leképezésre) nézve is invariáns, de ez egyáltalán nem triviális.

Ezután a nullmértékű halmazok témakörébe fogtunk bele. Nullmértékűnek neveztünk egy korlátos halmazt, ha a külső területe nulla. Ebből már következik, hogy nullmértékű halmaz mérhető és a területe 0. Egy igen fontos tétel arról szól, hogy egy korlátos halmaz pontosan akkor mérhető, ha a határa nullmértékű. Ennek igazolása céljából beláttuk, hogy korlátos H esetén $k_n(H) = b_n(H) + k_n(\operatorname{cl} H)$

(és közben megint felhasználtuk, hogy a lezárt lezártja önmaga). Innen határátmenettel adódott, hogy $k(H) - b(H) = k(\partial H)$, amiből a fontos tétel könnyedén kipottyant.

Következményként megfogalmaztuk, hogy mérhető A, B esetén $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ mind mérhető halmazok. A bizonyításban a fontos tételt és három ponthalmazelméleti összefüggést használtunk:

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$
$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B,$$
$$\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

(Itt felhívtam a figyelmet, hogy a jobb oldalon mindhárom esetben unió van, ez nem elírás.) Az óra végén még megjegyeztem, hogy az iménti következmény alapján a mérhető halmazok halmaza zárt az unió, metszet és különbség műveletekre nézve, ezért úgynevezett halmazgyűrű.