Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

2. előadás (február 19.)

Az óra elején felelevenítettem az $y' + py = q$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldására vonatkozó – a múlt óra végén elhangzott – ötletünket (e^P-vel való beszorzás, ahol $P' = p$). Ezután tételként megfogalmaztam, hogy ha p-nek van primitív függvénye, és P egy konkrét primitív függvény, továbbá qe^P-nek is van primitív függvénye, akkor az elsőrendű lineáris egyenlet összes megoldása $y = e^{-P} \int qe^P$ alakban áll elő. Megjegyeztük, hogy az iménti képletet nem befolyásolja, ha P helyett egy másik primitív függvényt választunk, hiszen az csupán konstansban tér el P-től, így könnyen láthatóan a kitevőkben az előjelek ellentétessége miatt végül ez a konstans eltűnik.

Egy sokkal fontosabb észrevételünk volt a következő. Ha $\tilde{Q}$ egy konkrét primitív függvénye qe^P-nek, akkor az összes többi primitv függvény $\tilde{Q} + c$ alakú, így

$$y = e^{-P}\tilde{Q} + c \cdot e^{-P},$$

ahol az első tag egy konkrét (idegen szóval partikuláris megoldása) az egyenletünknek, a második tag pedig a homogén egyenlet (azaz $y' + py = 0$) általános megoldása. Röviden $y = y_p + y_h$, vagyis az inhomogén egyenlet összes megoldása előáll a homogén általános megoldások (amelyek vektorteret alkotnak) és egy partikuláris megoldás összegeként. Valójában ez az észrevétel sokkal általánosabb keretek között is érvényes, méghozzá bármely *lineáris* feladat esetében. Ennek kapcsán tisztáztuk, hogy egy $Lu = f$ alakú feladatot (ahol L egy „operátor”, vagyis egy „valamilyen objektumhoz egy másik objektumot rendel”) mikor nevezünk lineárisnak (ha $L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2$ minden c_1, c_2 konstans esetén). Ha a feladat lineáris, akkor érvényes a megoldások $u = u_h + u_p$ alakú előállítása. Az észrevétel hasznosságát szemléltetendő, egy nagyon egyszerű példát mutattam: $y' + y = 1$ megoldásai. Könnyű észrevenni, hogy $y_p = 1$ egy megoldás, az $y' + y = 0$ homogén egyenlet megoldásai pedig egyszerűen adódnak: $y_h = ce^{-x}$. Így máris megkaptuk – integrálás nélkül – , hogy $y = ce^{-x} + 1$. Egy partikuláris megoldás „kitalálásának” eme módszerét szokás próbafüggvény módszernek nevezni (próbálkozunk bizonyos alakú megoldással, és sok esetben sikerrel járunk).

Tréfás példaként megnéztük a kis hangya és a gonosz manó problémáját: a 10 cm hosszú tetszőlegesen nyújtható gumiszalag végről egy hangya a szalag falhoz rögzített vége felé 1 cm/s sebességgel halad, miközben egy gonosz manó ellenkező irányban 100 cm/s sebességgel húzza a kötél végét. Eljut-e kis hangya a falhoz? A hangyának a faltól vett $y(t)$ távolságára adódó differenciálegyenlet levezetése nem szerepel a könyvben, ezért hasznosnak láttam elmondani, főleg azért is, hogy lássunk egy standard technikát („mi történik kis Δt idő alatt?”).

Ha Δt nagyon piciny, akkor „olyan mintha a nyújtás és a hangya falfelé mozgása egymás után történne”. A nyújtás során a hangya az $y(t)$ helyről (egyszerű hasonlóság miatt) az

$$y(t)\frac{10 + 100t + 100\Delta t}{10 + 100t}$$

helyre kerül, ezután pedig Δt-vel balra sétál, így végül a $t + \Delta t$ időpillanatbeli helyzete:

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + y(t)\frac{100\Delta t}{10 + 100t} - \Delta t.$$

Ebből átrendezés és $\Delta t \to 0$ határátmenet után kapjuk, hogy

$$y'(t) = -1 + \frac{100y(t)}{10 + 100t}.$$

Ez egy elsőrendű lineáris egyenlet, házinak adtam a megoldását az $y(0) = 10$ kezdeti feltétel mellett (a hangya kezdeti távolsága a faltól). A képletet segítségképpen felírtam:

$$y(t) = \left(t + \frac{1}{10}\right)(100 - \log(1 + 10t)).$$

Ebből végül megkaptuk, hogy van olyan T, amikor $y(T) = 0$, tehát a hangya elméletben elér a falig. Itt említettem néhány adatok összehasonlításképpen: a hangya falhoz érési időpontja és az univerzum életkorának viszonya; a hangya legnagyobb távolsága a faltól és az univerzum átmérőjének viszonya.

Ezek után rátértünk a másodrendű lineáris egyenletekre: $y'' + py' + qy = r$, ahol $p, q, r\colon I \to \mathbb{R}$ adott függvények (I intervallum). Csak speciális esetet nézünk: $p = a$, $q = b$ konstansok (az egyenlet állandó együtthatós) és $r = 0$ (homogén egyenlet). Az inhomogén egyenletnek majd próbafüggvénnyel keressük megoldását gyakorlaton.

Az $y'' + ay' + b = 0$ egyenletről megjegyeztük, hogy a megoldások vektorteret alkotnak, és jó lenne megadni ennek egy bázisát. Ehhez két szép tételt igazoltunk (amelyek Abeltől származnak). Az első arról szólt, hogy ha y_1 és y_2 megoldások, akkor $(y_1y_2' - y_1'y_2)e^{ax}$ konstansfüggvény. Ezt egyszerű deriválással be is láttuk. Megemlítettem, hogy valójában

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix},$$

és ezt szokás Wronski-determinánsnak hívni.

A másik tétel azt mondta ki, hogy ha y_1 és y_2 olyan megoldások, amelyekre a Wronski-determináns nem 0, akkor az egyenlet tetszőleges y megoldása előáll y_1 és y_2 lineáris kombinációjaként. Szokás az ilyen tulajdonságú y_1, y_2 párt alaprendszernek hívni. A tételt az előző állítás segítségével láttuk be.

Ezek után már csak egy konkrét alaprendszerre volt szükségünk. Ehhez bevezettük a karakterisztikus egyenlet fogalmát: $t^2 + at + b = 0$. A gyökök függvényében expliciten megadható egy-egy alaprendszer:

- ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós gyökök, akkor $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ alaprendszert alkot.
- ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ egyetlen (kétszeres) valós gyök, akkor $e^{\lambda x}$ és $xe^{\lambda x}$ alaprendszert alkot.
- ha $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ két komplex gyök (amelyek szükségképpen egymás konjugáltjai), akkor $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ és $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ alaprendszert alkot.

A három esetből mindössze az elsőt láttuk be.

Az óra végén egy alkalmazást tárgyaltunk: a rezgőmozgást. A rugóra m tömegű testet helyezünk; ekkor az egyensúlyi helyzetből való kitérítés esetén a visszatérítő eről arányos az $x(t)$ kitéréssel. A súrlódástól eltekintve ebből – Newton 2. törvénye alapján – az $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ differenciálegyenlet adódik. Szokás a $k/m = \omega_0^2$ jelölés, és ezzel a megoldások alakja: $x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)$. Ez a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete és megoldásai.