Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

12. előadás (május 14.)

Az előadás elején egy középiskolában is elmondható feladatot ismertettem, amelynek történeti érdekessége, hogy az első megoldása kettős integrálokhoz kapcsolódott az 1980-as évek közepén. A feladat: egy téglalapot a síkon felbontottunk vele párhuzamos oldalú téglalapok egymásba nem nyúló uniójára. Tudjuk, hogy a felbontás bármely téglalapjának van egész hosszúságú oldala. Mutassuk meg, hogy ekkor az eredeti téglalapnak is van egész hosszúságú oldala.

A bizonyítás lelke a következő lemma, amely akár emelt szinten még középiskolában is feladható: $\int_a^b \sin(2\pi x)\,dx = 0$ pontosan akkor, ha $a+b$ vagy $a-b$ egész szám. Ennek igazolása egy egyszerű Newton–Leibniz-tétel alkalmazás, majd két szög koszinuszának egyenlőségére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel meggondolása.

Ezek után a felbontás egy $T_i = [a,b] \times [c,d]$ téglalapján tekintettük az

$$\int_{T_i} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dx\,dy = \int_a^b \sin(2\pi x)\,dx \cdot \int_c^d \sin(2\pi y)\,dy$$

integrált, amelynek értéke a lemma miatt 0. Ha az eredeti téglalap $T = [0,u] \times [0,v]$ (eltolás után feltehető, hogy így helyezkedik el), akkor az integrál additivitása miatt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dx\,dy = \int_T \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dx\,dy = \int_0^u \sin(2\pi x)\,dx \cdot \int_0^v \sin(2\pi y)\,dy,$$

ahonnan ismét a lemma alkalmazásával kapjuk, hogy u vagy v egész.

Megjegyeztem, hogy azóta számtalan bizonyítása született a feladatnak. Az egyik legelegánsabb, és ez tényleg elemi, akár általános iskolai szakkörön is elmondható, a sík sakktáblaszerű színezésén múlik (de szándékosan nem részleteztem az ötletet, hogy legyen min töprengeni az érdeklődőknek). Emellett például páros gráfok segítségével is igazolható, vagy a fenti integrandus helyett másfélék is vehetők. Igen gazdag irodalma van a feladatnak (ajánlott irodalom: Stan Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle).

Ezután a félév anyagához kapcsolódóan vetítettem érdekességeket: rezonancia jelensége (hidak), cikloisok, brachisztochron és tautochron probléma, Peano-görbe, fraktálok, szfinx, tehetetlenségi nyomaték szemléltetése lejtőn legördülő hengerekkel, logaritmikus spirál stb.