Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

10. előadás (április 23.)

Az órát azzal kezdtem, hogy felelevenítettük az ívhosszal kapcsolatos emlékeinket a múltkori előadásról. Egyúttal újra elmagyaráztam a $\gamma'(t)$ vektor jelentését, ez a pillanatnyi sebességvektor (mert egy olyan különbségi hányados határértéke, amelynek számlálója az elmozdulásvektor), az abszolútértéke pedig a pillanatnyi sebesség (tehát a sebességvektor hossza). Ekkor az $s(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ képlet valójában az egyenletes mozgásra vonatkozó középiskolás $s = vt$ (a megtett út egyenlő a konstans sebesség szorozva az eltelt idővel) összefüggés általánosítása a nem állandó sebesség esetére.

Első példaként a ciklois görbével foglalkoztunk. A ciklois, kissé tréfásan, „a gördülő keréken ülő bogár pályája". Geometriai megfontolások alapján kihoztuk, hogy a t szögelfordulással paraméterezve a görbe $\gamma(t) = (at - a\cos t, a - a\sin t)$, ahol a a gördülő kerék (körvonal) sugara. Ebből egyszerű deriválás és négyzetre emelések után megkaptuk, hogy $|\gamma'(t)| = a\sqrt{2(1-\cos t)}$. Itt a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó képletet lehet használni, így végül $t \in [0, 2\pi]$ esetén $|\gamma'(t)| = 2a\sin\frac{t}{2}$ adódik, ahonnan a ciklois egy ívének hosszára az $s(\gamma) = 8a$ értéket nyerjük.

A cikloissal kapcsolatban megemlítettem a brachisztochron és tautochron problémákat, és a történeti háttérről is meséltem. A brachisztochon problémában két pont között az időben legrövidebb utat keressük úgy, hogy csak a nehézségi erő hat a tömegpontra. A megoldás egy ciklois ív. A tautochron problémában olyan görbét keresünk, amelynek bármely pontjából ugyanannyi idő alatt jutunk el a végpontba, ismét csak a nehézségi erőt figyelembe véve. A megoldás ugyanaz, mint a brachisztochron probléma esetében.

Ezután második példaként polárkoordinátás alakban adtunk meg görbét, és számoltunk ívhosszt. A polárkoordinátás megadás egy $r\colon [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ függvényt jelent olyan módon, hogy $\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Szemléletesen arról van szó, hogy $r(\varphi)$ egy forgó korongon a koronghoz viszonyított egyenes vonal mentén mozgó pontszerű testnek a középponttól vett távolságát írja le. Beláttuk, hogy polárkoordinátás alakban megadott görbe ívhosszára (a megfelelő simaság mellett) az $s(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)}\, d\varphi$ képlet adódik. Konkrét példaként az $r(\varphi) = e^{-\varphi}$ polárkoordinátás alakban megadott logaritmikus spirált néztük meg. Kiderült, hogy az ívhossza véges, annak ellenére, hogy az origót végtelen sokszor megkerüli.

Ezután homogén tömegeloszlású görbék tömegközéppontjával foglalkoztunk. A szokásos érvelés következett: egy $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ felosztás segítségével ívekre bontjuk a görbét, amelyeket egyetlen tömegponttal helyettesítünk és ennek a rendszernek határozzuk meg a tömegközéppontját – ez ideális esetben jól közelíti az eredeti görbe tömegközéppontját. Részletesebben: a $\gamma(t_{i-1})$ és $\gamma(t_i)$ pontokat összekövető ívet a $\gamma(c_i)$ pontba koncentrált $m_i = \varrho\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\, dt \approx \varrho\,|\gamma'(c_i)| \cdot (t_i - t_{i-1})$ tömegű tömegponttal helyettesítjük. Ekkor a kapott véges rendszer tömegközéppontja:

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i\gamma(c_i)}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

amelynek első koordinátája:

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i\gamma(c_i)}{\sum_{i=1}^n m_i} \approx \frac{\varrho\sum_{i=1}^n \gamma_1(c_i)\,|\gamma'(c_i)|\,(t_i - t_{i-1})}{\varrho s(\gamma)} \approx \frac{\int_a^b \gamma_1(t)\,|\gamma'(t)|\, dt}{s(\gamma)}.$$

A többi koordináta hasonlóan közelíthető, így kézenfekvő a görbe tömegközéppontját a kétdimenziós esetben az alábbi pontnak értelmezni:

$$S := \left(\frac{\int_a^b \gamma_1(t)\,|\gamma'(t)|\, dt}{s(\gamma)}, \frac{\int_a^b \gamma_2(t)\,|\gamma'(t)|\, dt}{s(\gamma)}\right).$$

Alkalmazásképpen meghatároztuk a felső félsíkba eső R sugarú félkörvonal tömegközéppontját, amelyre egyszerű integrálások után $S = (0, 2R/\pi)$ adódott (ahol az első koordintáta a szimmetria alapán is világos). Ennek kapcsán megemlítettem a Guldin-szabályt. Ha a (felső félsíkban elhelyezkedő)

γ görbének az x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának felszíne A, valamint a görbe tömegközéppontjának távolsága az x tengelytől d_S, akkor érvényes az $A = 2\pi \cdot d_S \cdot s(\gamma)$ összefüggés. Ezt le is ellenőriztük az iménti példa esetében, ahol a forgástest éppen egy R sugarú gömb, amelynek felszíne $4R^2\pi$. Azt is megemlítettem, hogy a forgástest V térfogatára szintén érvényes egy (másik) Guldin-szabály: $V = 2\pi \cdot d_S \cdot T$, ahol d_S most a görbe alatti tartomány tömegközéppontjának távolsága az origótól és T a tartomány területe. Ezt a képletet is teszteltük, méghozzá a félkörlemezzel, amelynek korábban már meghatároztuk a tömegközéppontját. Érdekes fakultatív házinak adtam, hogy a Guldin-szabályok segítségével számítsuk ki egy „úszógumi" (azaz a felső félsíkban fekvő körvonal megforgatásával nyert test) felszínét és térfogatát.

A tömegközéppont kapcsán még eszembe jutott egy középiskolai vonatkozás. Geometriában értelmezzük egy háromszög súlypontját. Vajon ez milyen kapcsolatban áll a háromszöglemez és a háromszögvonal súlypontjával (tömegközéppontjával)? Belátható, hogy a háromszöglemez tömegközéppontja a geometriában értelmezett súlypont, azonban a háromszögvonal súlypontja a középvonalak alkotta háromszög beírt körének középponta, amely csak szabályos esetben esik egybe a súlyponttal. A 2000-es évek elején a KöMaL-ban kitűzött matematikafeladat volt azon négyszögek meghatározása, amelyekre akár lemezként, akár (az oldalaiból álló) vonalként tekintünk, a tömegközéppont ugyanaz.

A görbék témakörének lezárásaként térkitöltő görbéről ejtettem szót. Folytonos görbére gyakran úgy gondolunk, mint amelynek pontjain a ceruzánkat végig tudjuk húzni felemelés nélkül. Ez a kép azonban megtévesztő lehet, ugyanis Peano konstruált olyan $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ folytonos görbét, amely áthalad a $[0,1] \times [0,1]$ négyzet minden pontján.

Az óra vége felé a vonalintegrál témakörébe kezdtünk bele. Motivációul a munkavégzésről beszéltünk. Ha az állandó nagyságú F erő azonos irányú az elmozdulással, amelynek nagysága s, akkor az erő munkavégzése $W = |F| \cdot s$. Ha az erő állandó, de α szöget zár be az u-ból v-be történő elmozdulás vektorával, akkor az erőnek csak az elmozdulás irányába eső komponense végez munkát, ezért a munkavégzés $W = |F| \cos\alpha \cdot |v - u| = \langle F, v - u\rangle$. A következő lépés az lenne, hogy tetszőleges görbe és vektormező esetén mennyi a munkavégzés. Ezzel folytatjuk a jövő órán.