Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

1. előadás (február 12.)

A technikai és tematikai tudnivalók után az első főbb témakörünket kezdtük el: közönséges differenciálegyenletek. Megemlítettem, hogy a közönséges szó a „közönséges egyváltozós" deriváltra utal, mert vannak például parciális és sztochasztikus differenciálegyenletek is. Előbbiben parciális deriváltak, utóbbiban a véletlen játszik szerepet.

Motivációként a derivált fogalmának jelentését elevenítettük fel. Most nem mint az érintő meredekségére fogunk gondolni, hanem egy $x(t)$, időtől függő (fizikai/biológiai/kémiai stb.) mennyiség pillanatnyi változási sebességére. Ha Δt ideig tekintjük a változást, akkor a mennyiség megváltozása $x(t+\Delta t) - x(t)$, így az *átlagos* változási sebessége

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenettel ebből az $x'(t)$ deriváltat kapjuk (feltéve, hogy x differenciálható), ami megadja a t időpillanatbeli *pillanatnyi* változási sebességet. Ha $x(t)$ az autó helyzete, akkor $x'(t)$ a megszokott sebesség, ami a mérőműszeren látszik. A sebesség változási sebessége pedig a gyorsulás.

Az időben lezajló folyamatok általában jól leírhatók olyan egyenletekkel, amelyekben egy adott mennyiség változási sebessége szerepel. Négy példát hoztam fel:

- populáció egyedszámának korlátlan növekedési modellje: az egyedszám változási sebessége arányos az aktuális egyedszámmal, matematikailag $x'(t) = kx(t)$, ahol k arányossági tényező ($k > 0$ esetén növekedés, $k < 0$ esetén csökkenés; ez utóbbi a radioaktív bomlás modellje is);
- Newton-féle lehűlési törvény: a lehűlés sebessége arányos a közeg és a test hőmérsékletének különbségével, matematikailag $T'(t) = k(T_{\text{közeg}} - T(t))$, ahol T a test hőméréséklete (egy hűtőbe tett ital példáját hoztam fel);
- keverési folyamat: edényben lévő tiszta vízbe valamilyen adott koncentrációjú oldat folyik be, elkeveredik, majd a felesleg kiürül; kérdés: az edényben lévő oldat koncentrációja (egyenletet nem írtam fel, gyakorlaton előkerülhet).
- szabadesés: $x''(t) = -g$, ahol g a nehézségi gyorsulás, $x(t)$ a talajtól vett távolság (a pozitív irányt felfelé véve).

Ezután (meseszerűen) megfogalmaztam, hogy mit is értünk differenciálegyenleten: keresendő egy $y\colon I \to \mathbb{R}$ függvény (ahol I valós intervallum), amelyre teljesül egy egyenlet, amely az y deriváltjait tartalmazza. Formálisan:

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (x \in I),$$

ahol Φ valamilyen adott sokváltozós függvény. Például a korlátlan növekedés esetében: $y'(x) - ky(x) = 0$. (Az $x(t)$ és $y(x)$ jelöléseket szándákosan váltogatom, hogy szokjuk meg. Az egyes könyvek is gyakran eltérő jelöléseket használnak attól függően, hogy fizika, matematika stb. témában íródtak.)

Az egyenletekhez hozzávehetünk kezdeti feltételt, vagyis megadhatjuk a megoldás és valamely deriváltjainak értékét egy adott kezdeti időpillanatban. Így egy kezdetiérték-feladatot nyerünk, például:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Végül előrevetítettem, hogy háromféle egyenlettípust fogunk tüzetesebben megvizsgálni: szeparábilis, elsőrendű és másodrendű lineáris.

Rátértünk a szétválasztható változójú, más szóval szeparábilis egyenletekre. Általános alakjuk:

$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$

ahol $f\colon I \to \mathbb{R}$ és $g\colon J \to \mathbb{R}$ adott függvények. Például: $y'(x) = xy(x)$, $y'(x) = ky(x)$, $y'(x) = 1$. Nem szeparábilis például: $y'(x) = x + y(x)$ (csillagosnak adtam meggondolni, hogy a jobb oldal miért nem áll elő a kívánt szorzat alakban.) Ezután a megoldási módszer következett. Ha g seholsem vesz fel 0 értéket, akkor oszthatunk $g(y(x))$-szel:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Feltéve, hogy f-nek és $1/g$-nek egyaránt van primitív függvénye, legyen egy konkrét primitív függvény F és G, akkor az előbbiből

$$(G(y(x)))' = F'(x),$$

így $G(y(x)) = F(x) + C$ valamilyen C konstanssal. Ez utóbbi egyenletnek (megfelelő feltételek mellett) az eredetivel való ekvivalenciáját tételként is megfogalmaztam. Az iménti implicit egyenletből szerencsés esetben kifejezhető az y megoldás. Példaképpen megoldottuk az $y'(x) = xy(x)$ és $y'(x) = ky(x)$ egyenleteket a „fizikus módszerrel". Ez azt takarja, hogy y' helyett dy/dx-et írunk, és az y-os tagokat (beleértve dy-t is) az egyik oldalra, az x-es tagok (beleértve dx-et) a másik oldalra rendezzük, majd intgrálunk a megfelelő változók szerint, és végül a kapott implicit egyenletből kifejezzük y-t.

Megjegyzésként két olyan egyenlettípust mutattam, amelyek nem szeparábilisak, azonban megfelelő helyettesítéssel azzá tehetők. Az $y'(x) = f(x + y(x))$ alakú egyenletet a $z(x) := x + y(x)$ új ismeretlen függvény, az $y'(x) = f(y(x)/x)$ típusú egyenletet pedig a $z(x) := y(x)/x$ függvény bevezetésével z-re nézve szeparábilis egyenletté transzformálhatjuk.

Ezután belekezdtünk az elsőrendű lineáris egyenletek témakörébe. Az általános alakjuk: $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, ahol p és q egy adott I intervallumon értelmezett rögzített függvények. Például a korlátlan növekedés egyenlet is ilyen: $y' - ky = 0$, de vigyázat, most $p = -k$, és $q = 0$. Egy másik példa $y' + xy = x^2$. Megbeszéltük az elsőrendű (a legmagasabb rendű derivált elsőrendű), a lineáris (p és q csak a változótól függnek), a homogén (ha q azonosan 0) és inhomogén (ha q nem azonosan 0) szavak jelentését. Végül egy megoldási módszert mutattam: ha p-nek van primitív függvénye, akkor legyen P egy rögzített ezek közül, és szorozzuk az egyenletet e^P-vel. Ekkor a bal oldalon éppen $(ye^P)'$ áll, így mindkét oldal integrálása és rendezés után $y = e^{-P}\int qe^P$ adódik. Jövő óra elején tételként megfogalmazom ezt az eredményt.