Többváltozós analízis 2. vizsgatematika

Osztatlan matematikatanár szak, 2018. tavasz

Tudnivalók a vizsgáról. A vizsgákra a Neptunban kell jelentkezni, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsga előtti napon emailben küldök vizsgabeosztást. A vizsgára kényelmes ruhában érdemes jönni, nem kell kiöltözni. Konzultációra általában hétköznap délutánonként 15 órától a Déli tömb 3.619-es szobájában van lehetőség, ha előzetes jelentkezést kapok (akár emailben, akár személyesen). Bármilyen probléma vagy kérdés esetén tessék nyugodtan emailt írni.

A vizsgán ezen a tematikán kívül semmilyen segédeszköz nem használható, üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga megkezdésekor mindenki egy feladatot és mellé párosítva két tételt húz (amelyek a tételsor három különböző részét fedik le), majd 1 óra felkészülési időt kap. Az elégséges jegy feltétele a **feladat megoldása** (esetleg apróbb segítséggel), a **definíciók és tételek pontos kimondása és értése** (ezt egyszerű kérdésekkel konkrét példákon könnyű ellenőrizni), a **bizonyítások alapgondolatának és főbb lépéseinek ismerete**, továbbá **a húzottaktól eltérő tételekből szúrópróbaszerűen feltett kérdésekre való helyes válaszadás** (e kérdések is definíciók, tételek, ellenpéldák ismeretét és értését ellenőrzik).

Vizsgakérdések.

1. Pillanatnyi változási sebesség. Példák időben változó folyamatok differenciálegyenlettel való leírására: korlátlan növekedés, lehűlés, szabadesés, keverés. Differenciálegyenlet és kezdetiérték-feladat.

2. Szeparábilis differenciálegyenletek: általános alak, tétel a megoldásokról, példák: $y' = ky$, $y' = xy$.

3. Szeparábilisra visszavezethető egyenletek. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek: általános alak, megoldásra vonatkozó tétel.

4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek: homogén általános és inhomogén partikuláris megoldás, alkalmazás: $y' + y = 1$. Példa: a kis hangya és a gonosz manó.

5. Állandó együtthatós, homogén, másodrendű lineáris differenciálegyenletek: általános alak, Wronski-determináns, alaprendszer, a megoldások vektortere kétdimenziós.

6. Állandó együtthatós, homogén, másodrendű lineáris differenciálegyenletek: karakterisztikus egyenlet, alaprendszer a gyökök függvényében.

7. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek alkalmazása: harmonikus rezgőmozgás, kényszerrezgés, rezonancia.

8. Ponthalmazelméleti fogalmak: belső, külső és határpont, halmaz belseje, külseje, határa, lezártja. Gömb, tégla, korlátosság és ekvivalens megfogalmazásai, egymásba nem nyúló halmazok.

9. Külső és belső terület értelmezése. Négyzetrács a síkon, a b_n, k_n mennyiségek értelmezése és határértékeik. Jordan-mérhetőség. Példa nem mérhető halmazra.

10. Tégla mérhetősége és területe. A terület nemnegativitása. Halmaz belsejének belső és lezártjának külső mértéke. A külső terület szubadditivitása.

11. A belső terület szuperadditivitása, a terület additivitása. A terület eltolásinvarianciája. Normáltság.

12. Nullmértékű halmaz. Mérhetőség és a határ területe. Mérhető halmazok és halmazműveletek.

13. Síkbeli normáltartomány és területe. Alkalmazás: háromszög és körlap területe.

14. Ellipszis területe. Integrálható függvény grafikonjának területe, szakaszok és sokszögek mérhetősége.

15. Egydimenziós Jordan-mérték alapfogalmai és tulajdonságai. Síkbeli alakzat szekciói, a terület kiszámítása szekciók segítségével. A Cantor-halmaz értelmezése és Jordan-mértéke.

16. Háromdimenziós Jordan-mérték alapfogalmai és tulajdonságai. Szekciók, térfogat mint szekcióterületek integrálja. Alkalmazás: henger, kúp, forgástest térfogata. Cavalieri-elv, félgömb térfogata.

17. Halmaz felosztása. Függvény alsó és felső összege, kapcsolatuk. Alsó és felső integrál, integrálhatóság. Példák: nem integrálható függvény, konstansfüggvény.

18. Integrál és műveletek, egyenlőtlenségek. Az integrál additivitása. Hasznos kritérium. Folytonos függvények integrálhatósága. Karakterisztikus függvény. Mérték és integrál kapcsolata.

19. Lebontási tétel (szukcesszív integrálás). Alkalmazások: integrálás téglán, normáltartományon, háromszögön.

20. Az $\int_0^1 (x-1)/\log x\,dx$ integrál. Lemez tömegének kiszámítása sűrűségből: homogén, inhomogén tömegeloszlás esete.

21. Tömegközéppont: véges tömegpontrendszer, lemez. Alkalmazás: félkörlap tömegközéppontja.

22. Integráltranszformáció tétele két dimenzióban, Jacobi-mátrix. Kapcsolat az egyváltozós helyettesítéses integrálással. Polárhelyettesítés, Jacobi-determináns.

23. A polárhelyettesítés alkalmazásai: negyedkörlap területe, félgömb térfogata. Az $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrál kiszámítása integráltranszformáció segítségével.

24. Görbe, paraméterezés, példák: szakasz, körvonal, grafikon. Töröttvonal, ívhossz, rektifikálhatóság. Példa nem rektifikálható folytonos görbére.

25. A rektifikálhatóság egy elégséges feltétele. Sebességvektor, az ívhossz kifejezése a sebességvektorral. Grafikon ívhossza.

26. Ciklois paraméterezése és ívhossza. Polárkoordinátás alakban megadott görbe ívhossza, példa: logaritmikus spirál.

27. Görbe tömegközéppontja, példa: félkörív tömegközéppontja. Munkavégzés: állandó erő munkája szakasz mentén, vektormező munkája tetszőleges görbe mentén.

28. Görbe menti vektormező vonalintegrálja. A vonalintegrál felírása Riemann-integrál segítségével. Példa: körvonal mentén vett vonalintegrál.

29. Primitív függvény (potenciál), Newton–Leibniz-tétel vonalintegrálokra, példa. Zárt görbén vett vonalintegrál, a vonalintegrál úttól való függetlensége, kapcsolat a primitív függvény létezésével.

30. Primitív függvény létezésének egy szükséges feltétele. Ellenpélda az elégségességre. A primitív függvény létezésének egy elégséges feltétele, példa.