Egyváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

9. előadás (április 17.)

Belekezdtünk a félév utolsó témakörébe, ez a végtelen sorok. Először néhány motivációs példát írtam fel. Elmeséltem Akhilleusz és a teknősbéka paradoxonát (Akhilleusz 1 métert, a teknősbéka 1/10 métert tesz meg másodpercenként; ha Akhilleusz 1 méter előnyt ad a teknősnek, akkor sosem éri utol, mert mialatt a teknős adott időpontbeli helyére ér, addigra a teknős már továbbment). Ezután a szokásos általános iskolás okoskodással beláttuk, hogy $0{,}99999\dots = 1$: ha a szóban forgó szám x, akkor $10x - x = 9$, tehát $x = 1$. Ezzel a gondolatmenettel azonban vigyázni kell, mert ilyen módon az $x = 1 + 2 + 2^2 + \dots$ összegre $2x - x = -1$, vagyis $x = -1$ adódik. Hasonló módon, $x = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$ esetén $x - 1 = -x$, ezért $x = 1/2$. Világos, hogy egyik esetben sem megalapozott a műveletek elvégzése, hiszen az axiómák nem szólnak végtelen sok tagú összegekről.

Adott (a_n) sorozat esetén bevezettük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ (formális) végtelen sort. A sor részletösszegei az $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, stb. sorozat tagjai. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, ha a részletösszegekből álló (s_n) sorozat konvergens és limesze A. Ha a sor nem konvergens, akkor divergensnek hívjuk. Amennyiben $s_n \to \infty$, akkor a sor divergens, de van összege, méghozzá ∞ (a $-\infty$ összeget hasonlóan értelmezzük). Mindezeket úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. A végtelen sor tagjainak az (a_n) sorozat tagjait értjük.

Ezután példákat néztünk. Az $a_n = 0$ esetben a sor konvergens és összege 0; az $a_n = 1$ esetben a sor divergens és összege ∞; az $a_n = (-1)^n$ esetben $s_{2n+1} = -1$ és $s_{2n} = 0$, amely sorozat oszcillálva divergens (a miértet szóban megbeszéltük részsorozatokkal), ezért a sor divergens és nincs összege. Ezután az $a_n = q^n$ példáját, vagyis a mértani sort néztük meg, és beláttuk (a mértani sorozat első n tagjának összegképlete és a q^n sorozat korábbi tanulmányaink során megismert határértékei alapján), hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor $|q| < 1$ esetén konvergens és összege $1/(1-q)$; a $q \geq 1$ esetben a sor divergens, összege ∞; végül a $q \leq -1$ esetben a sor divergens és nincs összege.

Utolsó példaként a tizedes törteket elevenítettük fel, amelyeket még a Bevezető analízis2 tárgy keretében tanultunk. Akkor végtelen sok egyenlőtlenség definiálta egy $x > 0$ valós szám tizedes tört alakját. Most azt láttuk be, hogy ha az $x > 0$ valós szám végtelen tizedestört alakja $n{,}a_1a_2a_3\dots$, akkor az $n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots$ sor konvergens és összege éppen x.

Ezt követően a konvergenciával kapcsolatos néhány elemi tulajdonságot tekintettünk át. Először a sor konvergenciája és az algebrai műveletek kapcsolatát tisztáztuk: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ is konvergens és összege $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; ha $\sum_{n=1}^{\infty}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergensek, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ is konvergens és összege $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. A bizonyítás a részletösszegek segítségével történt.

Következett a triviális kritérium: ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$sor konvergens, akkor $a_n \to 0$. Láttuk a fáradékony bolha példáját ($a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$), amely azt mutatta, hogy a triviális kritérium csak szükséges feltétel a konvergenciához.

Nemnegatív sorok konvergenciájával kapcsolatban kimondtam és igazoltuk, hogy egy ilyen sornak mindig van összege, méghozzá a sor konvergens, ha a részletösszeg-sorozata felülről korlátos, továbbá a sor összege ∞, ha a részletösszeg-sorozata felülről nem korlátos.

Példaként megnéztük a harmonikus sor divergenciáját. A bizonyítás a szokásos 2^n-es csoportosítással és alsó becsléssel igazolta, hogy $s_{2^n} \geq 1 + n/2$, tehát (s_n) felülről nem korlátos.

Megnéztük ezután a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját. Mondtam, hogy ez is kijön a harmonikus sornál alkalmazott 2^n-es csoportostással, csak most felső becslés szükséges (ezt házinak adtam végiggondolni). Egy másik bizonyítás pedig az volt, hogy $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ (ha $n > 1$), így egy teleszkopikus összeggel tudjuk felülről becsülni a részletösszegeket. A teleszkopikus összeg $2 - 1/n$, amely felülről korlátos, így a részletösszegek is azok. Kimondtam, hogy általában a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha $c > 1$. Kicsit meséltem a hiperharmonikus sor összegéről c pozitív egész esetén ($c = 2$-re az összeg $\pi^2/6$, páros α-ra π^{2k}-szor egy racionális szám, páratlan α esetén az $\alpha = 3$ kivételével azt sem tudjuk, hogy racionális vagy irracionális-e.)