# Egyváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

**8. előadás (április 10.)**

Az előadás elején visszatértem az integrálfüggvényre, felírtam ismét a folytonosságról és a differenciálhatóságról szóló tételt. Beláttuk a folytonosságra vonatkozó részt, a differenciálhatóságot kihagytuk. Megnéztük példaként a szignumfüggvény integrálfüggvényét a $[-1, 1]$-en:

$$\int_{-1}^{x} \operatorname{sgn} x \, dx = \begin{Bmatrix} -x-1, & \text{ha } x < 0, \\ x-1, & \text{ha } x \geq 0. \end{Bmatrix} = |x| - 1.$$

Jól látszik, hogy ez nem differenciálható a 0 pontban, vagyis az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételben lényeges feltétel az integrandus folytonosssága.

Rátértünk ezután a határozott integrál alkalmazásaira, elsőként a területszámításra. Elmondtam, hogy a terület fogalmát a későbbi analízis tanulmányok során pontosan tanuljuk, ez a Jordan-mérték. Most csak annyit néztünk meg, hogy a terület valójában egy függvény, amely a sík területtel rendelkező halmazaihoz (amelyeket mérhető halmazoknak hívunk) egy számot rendel. Négy tulajdonságot várunk el ettől a függvénytől: 1) nemnegatív 2) additív (egymásba nem nyúló mérhető halmazok uniójának területe a területek összege) 3) eltolásra nézve invariáns (mérhető halmaz eltoltjának a terület egyenlő az eredeti halmaz területével) 4) egységnyi területként az egységnégyzetet jelöljük ki. Belátható, hogy egyértelműen létezik ilyen területfüggvény, és azok a halmazok is meg vannak határozva, amelyekhez rendelhető terület. A térfogat hasonlóan értelmezhető, ezt nem részleteztem.

Bevezettem ezt követően a normáltartomány fogalmát, amelyet az $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények határoznak meg, ahol $f \leq g$:

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Ha $f, g$ integrálhatók, akkor $N$-nek van területe és az $\int_a^b (g - f)$. A bizonyításról csak annyit mondtam, hogy az $f = 0$ eset volt a határozott integrál kiindulópontja (adott felosztásoz tartozó beírt és körülírt téglalapok területeivel való közelítés), és utána pedig két területet kell egymásból kivonni. De mivel nem tudjuk mi is a terület ezért nem mentem bele a részletekbe, mindenkinek az eddig is létező intuíciójára van bízva (egyelőre). Példaképpen az egység sugarú negyedkör területét számoltuk ki: $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$ (itt házinak adtam a visszalapozást a korábban kiszámolt primitív függvényre).

Következett a forgástestek térfogata. Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ függvény grafikonját az $x$ tengely körül megforgatva egy forgástestet kapunk:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}.$$

Ha $f$ integrálható, akkor a test térfogata $V = \pi \int_a^b f^2$. A bizonyításról anyit mondtam, hogy a térfogat alsó és felső közelítése egy adott felosztáshoz tartozó beírt és körülírt hengerekkel történik. A beírt hengerek térfogatösszege:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left( \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right)^2 (x_i - x_{i-1}) = \pi \sum_{i=1}^{n} \left( \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f^2 \right) (x_i - x_{i-1}) = \pi s_F(f^2).$$

Körülírt hengerek esetén az térfogatösszeg $\pi S_F(f^2)$, így a térfogat csakis $\pi \int_a^b f^2$ lehet. Példaképpen kiszámoltuk az egység sugarú gömb térfogatát.

Végül grafikon ívhosszáról ejtettem szót. A fogalomról csak annyit mondtam, hogy beírt töröttvonalak hosszainak szuprémuma. Ha ez véges, akkor a grafikonnak van ívhossza (rektifikálható). Kimondtam bizonyítás nélkül, hogy ha $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és a derivált integrálható, akkor a grafikonnak van ívhossza, mégedig $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Példaképpen az egység sugarú negyedkör ívhosszát számoltuk ki:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Itt rögtön feltettem a kérdést, hogy mi nem stimmel az iménti levezetéssel. Sikerült kitalálni, hogy a baj az integrandus nemkorlátossága, így a Riemann-integrálnak nincs értelme. Ennek úgy lehet értelmet adni, hogy csak $u$-ig integrálunk, ahol $0 < u < 1$, és azután $u \to 1 - 0$ határértéket veszünk. Ekkor ez már nem Riemann-integrál, hanem ennek a neve improprius integrál.

Értelmeztük ezután azt, hogy ha az $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ függvény integrálható bármely $[a, u] \subset [a, b)$ intervallumon, akkor az $[a, b)$-n vett improprius integrálja létezik és véges, amennyiben a $\lim_{u\to b-0} \int_a^u f(x)\, dx$ határérték létezik és véges. Ekkor ezt a határértéket továbbra is $\int_a^b f(x)dx$ jelöli, de ez nem közönséges Riemann-integrál, hanem improprius. Hasonlóan értelmezhető az $(a, b]$-n vett improprius integrál. Példaképp megnéztük, hogy

$$\lim_{u\to 0+0} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

Ezután (mindenféle definíció nélkül, csak „megérzésre") kettébontással és limesszel kiszámoltuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi.$$