Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

7. előadás (március 27.)

Az előadás első részében az integrál tulajdonságaival kapcsolatban tárgyaltunk sok-sok apró állítást. A bizonyításokba gyakran azért nem mentem bele, mert jobbára csak „játék az alsó, felső és oszcillációs összegekkel".

Kezdtem az integrál és algebrai műveletek kapcsolatával. Ha f, g integrálhatók $[a,b]$-n és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f, f+g, fg$ szintén integrálhatók $[a,b]$-n és

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f, \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

A bizonyítás gondoláról pár mondatban beszéltem: pozitív λ esetén $s_F(\lambda f) = \lambda s_F(f)$ (és hasonlóan a felső összegekre), ahonnan f és λf alsó és felső integráljainak egyenlősége adódik. A negatív λ esetét házinak adtam, jó gyakorló feladat, hogy $\sup(\lambda f)$ milyen kapcsolatban van f (esetleg $(-f)$) szuprémumával vagy infimumával. Az összegre vonatkozó állítás bizonyítása pedig azon múlik, hogy $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ és $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$, ahonnan $S_F(f+g) \leq S_F(f) + S_F(g)$ és $s_F(f+g) \geq s_F(f) + s_F(g)$ adódik, amiből nem nehéz a megfelelő összefüggésre való következtetés.

A műveletek kapcsán a következő tétel a szorzat Riemann-integrálhatóságára vonatkozott. Itt is vázoltam egy gondolatmenetet a bizonyításról. Először f^2 integrálhatóságát érdemes belátni, aztán pedig használható az $fg = ((f+g)^2 - (f-g)^2)/4$ összefüggés, amelynek jobb oldalán mindkét tag integrálható. A négyzet integrálhatósága pedig az oszcillációs összegre vonatkozó hasznos kritérium segítségével egyszerűen belátható. Csupán azt kell észrevenni, hogy ha $|f| \leq K$, akkor $\Omega_F(f^2) \leq 2K\Omega_F(f)$. Felhívtam a figyelmet, hogy szorzat integráljára nincsen képlet!

Megjegyeztem, hogy bár két Riemann-integrálható függvény szorzata Riemann-integrálható, ám határozatlan integrál esetében nem igaz ilyen állítás: előfordulhat, hogy f-nek és g-nek is van primitív függvénye, de a szorzatuknak nincs.

Következett az abszolútérték integrálhatósága: ha f integrálható $[a,b]$-n, akkor $|f|$ is integrálható. A bizonyítás ismét azon múlik, hogy $\Omega_F(|f|)$ felülről becsülhető $\Omega_F(f)$ valamilyen konstansszorosával (ennnek meggondolását az érdeklődők számára javasoltam).

Ezután a reciprok művelete jött. Ha f integrálható $[a,b]$-n és $f > c > 0$ az $[a,b]$-n, akkor $1/f$ is integrálható $[a,b]$-n. Az $f(x) = 1/x$, ha $0 < x < 1$ és $f(0) = 1$ függvény példája mutatja, hogy pozitív alsó korlát feltétele nem hagyható el. A bizonyítás megint azon múlik, hogy $\Omega_F(1/f)$ felülről becsülhető $\Omega_F(f)$ valamilyen konstansszorosával (ennnek meggondolását az érdeklődők számára javasoltam).

Végül a kompozíció művelete kapcsán bizonyítás nélkül kimondtam, hogy ha f integrálható $[a,b]$-n és g folytonos $R(g)$-n, akkor $g \circ f$ integrálható $[a,b]$-n. Hangsúlyoztam, hogy a külső függvénynek a folytonossága van feltéve, a belsőnek pedig az integrálhatósága. Fordított esetben általában nem következik a kompozíció Riemann-integrálhatósága.

A műveletek után az integrálnak az egyenlőtlenségekkel való kapcsolatát néztük meg. Ha $f \leq g$ és integrálhatóak $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. A bizonyítás lényege az volt, hogy a $h = g - f \geq 0$ függvény minden alsó összege nemnegatív, így – mivel integrálható – az integrálja is nemnegatív.

Az előbbi tétel speciális esete az, hogy ha f integrálható $[a,b]$-n és ott $m \leq f \leq M$, akkor

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq M \cdot (b-a).$$

Másrészt azt is beláttuk, hogy

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Az óra első felének utolsó témaköre az integrál additivitása volt. Ha f integrálható az $[a,b]$ és $[b,c]$ intervallumokon, akkor az $[a,c]$-n is integrálható és

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Ha bevezetjük az $\alpha\colon [a,b] \mapsto \int_a^b f$ hozzárendelést (tegyük fel, hogy f minden intervallumon integrálható), akkor α egy additív függvény lesz, amely intervallumokhoz számot rendel és $\alpha([a,b] \cup [b,c]) = \alpha([a,b]) + \alpha([b,c])$. Ennek kapcsán $a > b$ esetén bevezettük az $\int_a^b f := -\int_b^a f$ megállapodást, és megjegyeztem, hogy ezzel az additivitás továbbra is révényben marad.

Mindezek után rátértünk az integrálás és differenciálás kapcsolatára, a Newton–Leibniz-tételre: ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a,b)-n differenciálható és $F' = f$, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{\text{jel}}{=} [F]_a^b.$$

A bizonyítás lényege, hogy az $F(b) - F(a)$ különbséget teleszkopikus összeg alakban írjuk fel, és Lagrange-középértéktételt alkalmazva egy olyan összeget kapunk, amely az f alsó és felső összegei közé esik.

Példaként kiszámoltunk egy konkrét integrált:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Tisztáztuk ezt követően, hogyan fest a parciális integrálás szabálya határozott integrálokra: ha f, g folytonosak $[a,b]$-n, differenciálhatóak (a,b)-n, f', g' integrálhatóak $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Példaként az $\int_1^2 x \log x\, dx$ integrált számoltuk ki.

Megnéztük ezután a helyettesítéses integrálást határozott integrálokra: ha f folytonos $R(g)$-n, g folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b) és g' integrálható $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

Példaként az $\int_0^1 \sin x\, dx$ integrált írtuk át $x = \sin t = g(t)$ helyettesítéssel. Ekkor $g(0) = 0$ és $g(\pi/2) = 1$, így az integrál az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt$ alakot ölti. Házinak adtam, hogy innen fejezzük be az integrálást.

Az előadás utolsó részében az integrálfüggvény fogalmát vezettem be. Eddig volt már szó primitív függvényről ($F' = f$), határozatlan integrálról (a primitív függvények halmazáról), határozott (vagy Riemann-) integrálról. Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor f integrálfüggvénye:

$$I(x) := \int_a^x f \quad (x \in [a,b]).$$

(Megjegyeztem, hogy valójában $\int_c^x$ is integrálfüggvény (ahol $c \in [a,b]$), de ez csupán konstansban tér el I-től). Tételként megfogalmaztam, hogy 1) I folytonos $[a,b]$-n; 2) ha f folytonos x_0-ban, akkor ott I differenciálható és $I'(x_0) = f(x_0)$; 3) az előbbinek következménye, hogy ha f folytonos az $[a,b]$-n, akkor az integrálfüggvénye (a,b)-n differenciálható, tehát I primitív függvénye f-nek (a,b)-n, vagyis minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.