# Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

**6. előadás (március 20.)**

A hasznos kritériumot újra felírtam az óra elején, mert többször használjuk majd. Hozzátettem, hogy a kritérium teljesülésekor az integrál az az egyértelmű valós szám, amely legalább akkora, mint bármely alsó összeg, és legfeljebb akkora, mint bármely felső összeg.

A kritérium alkalmazásaként beláttuk a monoton függvények integrálhatóságát a növő esetben. Ekkor bármely osztóintervallumon a függvénynek van legkisebb értéke, mégpedig $f(x_{i-1})$, és van legnagyobb értéke, méghozzá $f(x_i)$. Ezen észrevételek alapján az $S_F - s_F$ összeget egyenletes felosztás (azaz $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$) esetén egyszerűbb alakban írhatjuk (közben egy teleszkopikus összeget észrevéve):

$$S_{F_n} - s_{F_n} = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Ha $n$ elég nagy, akkor a jobb oldal tetszőleges $\varepsilon > 0$ számnál kisebb lesz, így teljesül a hasznos kritérium feltétele, van olyan $F = F_n$ felosztás, amelyre $S_F - s_F < \varepsilon$.

Ezután megemlítettem, hogy az $S_F - s_F$ kifejezést szokás oszcillációs összegnek is nevezni (jele: $\Omega_F$), és a $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]}$ értéket az $f$ függvény $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon vett oszcilációjának („ingadozás”) hívjuk. Ezenkívül egy negyedik összeget is bevezettem, ez volt a közelítő vagy más néven Riemann-összeg. Ehhez nem csupán egy $F$ felosztás, hanem $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ közbülső pontok is adottak, és ekkor

$$\sigma_F := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Rajzon ábrázoltam, hogy ezt az összeget általában se nem beírt, se nem körülírt téglalap területekkel szemléltethetjük. Valójában minden felosztásra $s_F \le \sigma_F \le S_F$. Ennek az összegnek a segítségével is meg lehet fogalmazni az integrálhatóság egy kritérimát, mégpedig:

$$\exists\, I \in \mathbb{R}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall F\, (\delta(F) < \delta \implies |I - \sigma_F| < \varepsilon).$$

Szavakban: a függvény integrálható és $I$ az integrálja, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges, $\delta$-nál finomabb felosztás esetén a közelítő összeg már $\varepsilon$-közel van az $I$ értékhez.

Az óra további részének célja az volt, hogy a folytonos függvények integrálhatóságát belássuk. Ez több előkészületet igényel, az egyenletes folytonosság fogalmát fogjuk bevezetni és tanulmányozni.

Emlékeztetőül felírtam egy $f$ függvény $x_0$ pontbeli folytonosságának fogalmát: $f$ értelmezve van az $x_0$ egy környezetében, továbbá

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Ez egy lokális tulajdonság, az $x_0$ pontbeli tulajdonságot fejez ki.

A $(0, 1]$ intervallumon tekintett $1/x$ függvény példáján megnéztük, hogy rögzített $\varepsilon$ esetén a „jó” $\delta$ függ az $x_0$ pont helyzetétől: minél közelebb van $x_0$ a 0-hoz, annál kisebb $\delta$ „jó” csak, nem tudunk egy olyan $\delta$ számot megadni, amelyik minden $x_0$ pontban jó lenne az adott $\varepsilon$-hoz. Konkrétan (rajz segítségével) kihoztuk, hogy bármely $x_0$ pontban a lehető legnagyobb jó $\delta$ értéke $\varepsilon x_0^2/(1 + \varepsilon x_0)$, amelyről világosan látszik, hogy $x_0 \to 0$ esetén 0-hoz tart. Ha azonban az $1/x$ függvényt az $[1, \infty)$ intervallumon tekintjük, akkor a legnagyobb jó $\delta$ értékeknek van pozitív alsó korlátja, mégpedig $\varepsilon/(1 + \varepsilon)$. Ez tehát választható egy „univerzális” $\delta$-nak, amely ezen az intervallumon bármely $x_0$ pontban jó lesz a folytonossághoz az ellenség által adott rögzített $\varepsilon$ szám mellett.

Egy másik példa az $x^2$ függvény volt, amelyet először az $[1, \infty)$ intervallumon néztünk. A legnagyobb jó $\delta$ értékére $\varepsilon/(\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0)$ adódott, és ez $x_0 \to \infty$ esetén 0-hoz tart, tehát ismét nincs univerzális $\delta$, amely minden $x_0$ pontban jó lenne $\varepsilon$-hoz. Azonban az $[1, 100]$ intervallumon már van pozitív alsó korlátja a $\delta$ értékeknek, mégpedig $\varepsilon/(\sqrt{100^2 + \varepsilon} + 100)$. Ez tehát egy univerzális $\delta$, az összes pontban jó a rögzített $\varepsilon$ számhoz.

Amikor meg tudunk adni „univerzális” $\delta$-t az adott $\varepsilon$-hoz, akkor az egy fontos tulajdonsága a függvénynek, ez az egyenletes folytonosság. Az $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in H\, (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ez egy globális tulajdonság, amely a $H$ halmazon teljesül és nem egy adott pontban. Világos, hogy $y = x_0$ választással megkapjuk az $x_0$ pontbeli folytonosság definícióját, tehát az egyenletes folytonosságból következik a minden pontbeli folytonosság.

Kimondtam ezután Heine tételét, amely szerint ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (a múlt félévben ezt úgy értelmeztük, hogy $(a,b)$ minden pontjában folytonos, $a$-ban balról, $b$-ben pedig jobbról folytonos), akkor egyenletesen folyonos $[a,b]$-n. A bizonyítás indirekt módon történt, használtuk a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt és a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet (a szép analízis bizonyítás egyik mintapéldája).

Végül a Heine-tétel alkalmazásaként igazoltuk, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor integrálható $[a,b]$-n. Itt ismét a hasznos kritériumot ellenőriztük, az $S_F - s_F$ összeg elég finom $F$ felosztás esetén most azért lesz „kicsi” , mert minden $i$-re $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ „kicsi” az egyenletes folytonosságból következően (valójában maximumról és minimumról, tehát két függvényérték különbségéről van szó).