Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

5. előadás (március 13.)

Befejeztük a határozatlan integrál témakörét és belekezdtünk a Riemann-integrál témájába. Motivációként az x^2 függvény $[0, 1]$ intervallum feletti grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét próbáltuk meghatározni. A területfogalmat intuitívan használjuk (mindenkinek a fejében van erről valamiféle elképzelés), majd a későbbi analízis tanulmányok során tisztázzuk pontosan a matematikai jelentését. Alsó és felső közelítéseket írtunk fel úgy, hogy az intervallumot felosztottuk $1/n$ hosszúságú részintervallumokra, majd mindegyik fölé egy beírt és egy körülírt téglalapot emeltünk. A beírt téglalapok területösszege a szóban forgó síkidom területének alsó, a körülírt téglalapok területösszege pedig felső becslését adja. Így kaptuk, hogy ha egyáltalán létezik területe az adott síkidomnak, akkor az csakis $1/3$ lehet.

A motivációt követően elkezdtük bevezetni az alapfogalmakat, amelyekkel az előbbi meseszerű levezetést formalizálhatjuk. A következő fogalmak szerepeltek: *intervallum felosztása* ($F = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ véges sorozat, amelyre $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$); *osztópont* (az x_i pontok); *osztóintervallum* (az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok); *felosztás finomsága* ($\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$, vagyis az osztóintervallumok hosszainak maximuma); *felosztás finomítása* (véges sok új osztópont hozzávétele); *két felosztás közös finmomítása* (az osztópontok egyesítése); adott korlátos (ez nagyon lényeges!) $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén egy $F = (x_0, \ldots, x_n)$ felosztáshoz tartozó *alsó és felső összegek*:

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[x_{i-1}x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

$$S_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

(A korlátosság miatt az infimumok és a szuprémumok mind valós számok.) Használni fogjuk az $m_i = \inf_{[x_{i-1}x_i]} f$ és $M_i = \sup_{[x_{i-1}x_i]} f$ házi jelöléseket, ezekkel

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \qquad S_F = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ezek után rátértünk az alsó és felső összegek tulajdonságaira. Észrevettük azt az egyszerű tényt, hogy minden felosztásra $s_F \leq S_F$. Ezután arra hajtottunk, hogy ezt tetszőleges felosztásokra igazoljuk: $s_F \leq S_G$. Ehhez először azt igazoltuk, hogy felosztás finomításakor az alsó összeg nem csökkenhet, felső összeg pedig nem nőhet. Ezt nyilván elég egyetlen új osztópont hozzávétele esetén belátni, mert utána csak ismételgetni kell. A bizonyítást csak az alsó összegekre végeztük el. A gondolat az, hogy felírjuk az $s_{\tilde{F}} - s_F$ különbséget (ahol $\tilde{F}$ egy új osztópont hozzávételével adódik F-ből), majd észrevesszük, hogy ez a különbség két nemnegatív tag összege (közben használjuk azt is, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}$ nemüres korlátos halmazok, akkor $\inf A \geq \inf B$, azaz szűkebb halmaz infimuma legalább akkora, mint bővebbé).

Tudva, hogy finomítás során az alsó összegek nem csökkennek és a felső összegek nem nőnek, tetszőleges F, G felosztások közös H finomítását véve, $s_F \leq s_H \leq S_H \leq S_G$. Mindez azt is jelenti, hogy az alsó összegek halmaza felülről korlátos (bármely felső összeg felső korlátja), valamint a felső összegek halmaza alulról korlátos (bármely alsó összeg alsó korlátja).

Definiálhatjuk tehát az alsó összegek halmazának szuprémumát, ez az f Darboux-féle alsó integrálja, $\underline{\int_a^b} f$; továbbá a felső összegek halmazának infimumát, ez a Darboux-féle felső integrál, $\overline{\int_a^b}$.

Bármely korlátos f függvénynek van tehát alsó és felső integrálja (méghozzá egy valós szám), sőt, az alsó integrál legfeljebb akkora, mint a felső integrál. Ez utóbbi tulajdonság abból következik, hogy ha A és B olyan nemüres korlátos halmazok, amelyekre minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a \leq b$, akkor $\sup A \leq \inf B$ (ezt most a konkrét esetben az alsó és felső összegek halmazával levezetük – egyébként a Bevanal2 kurzusban a hatványozás kapcsán ezzel az okoskodással már találkoztunk).

Egy korlátos függvényt Riemann-integrálhatónak nevezünk $[a, b]$-n, ha az alsó és felső integrálja megegyezik, ekkor ez a közös érték az f Riemann-integrálja (határozott integrálja) az $[a, b]$ intervallumon, jele $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,dx$.

Példaként megnéztük a Dirichlet-függvényt a $[0, 1]$-en, és beláttuk bármely F felosztásra $s_F = 0$, $S_F = 1$ (felhasználtuk, hogy bármely két különböző valós szám között van racionális és irracionális szám). Ebből következően a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható a $[0, 1]$-en.

Második példa a konstans c függvény, amelyre minden F felosztás esetén $s_F = S_F = c(b-a)$, tehát a függvny Riemann-integrálható és $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Harmadik példa: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Ez következik az óra elején felírt alsó és felső összegekből (akkor még csak beírt és körülírt téglalapok területösszegéről beszéltünk), valamint abból, hogy azok tetszőlegesen közel lehetnek az $1/3$-hoz, tehát az alsó integrál legalább $1/3$, a felső integrál pedig legfeljebb $1/3$, de ekkor szükségképpen egyenlőek.

Az óra végén igazoltuk a Riemann-integrálhatóság „hasznos” kritériumát (ez csak házi elnevezés): az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists F$ felosztás, hogy $S_F - s_F < \varepsilon$. A bizonyításokban az alsó és felső integrál definícióját és a közös finomítás ötletét használtuk.