Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

4. előadás (március 6.)

Az órát a parciális integrálásra vonatkozó két példával kezdtük (a múlt előadás végén már szerepelt egy példa):

$$\int e^x \cos x \, dx, \qquad \int \log x \, dx.$$

Az első példában kétszer integráltunk parciálisan (vigyázva arra, hogy a második lépésben ne visszafele végezzük az első lépést), majd a kapott összefüggésből ki tudtuk fejezni a keresett integrált. A második integrálnál a $\log x = 1 \cdot \log x$ trükköt alkalmaztuk és ugyancsak megbeszéltük, hogy mi a logikus szereposztás.

A következő integrálási szabály a helyettesítéses integrálás volt:

$$\int f(g(t))g'(t) \, dt = F(g(t)) + C,$$

feltéve, hogy g differenciálható, $R(g) \subset D(f)$ és $F' = f$. Ezt kétféleképpen alkalmazhatjuk, balról jobbra és fordítva. Az elsőre, amikor F ismert, példa volt

$$\int te^{t^2} \, dt = \frac{1}{2} \int e^{t^2} 2t \, dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C.$$

A jobbról balra irányra, amikor F nem ismert (valójában ez az „igazi" helyettesítés), a következő példákat néztük:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1} \, dx \underset{dx=2t\,dt}{\overset{x=t^2}{=}} \int \frac{1}{t+1} 2t, \, dt,$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} \, dx \underset{dx=\frac{1}{t}\,dt}{\overset{x=\log t}{=}} \int \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, dt,$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \underset{dx=\cos t\,dt}{\overset{x=\sin t}{=}} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt.$$

A jobb oldali integrálokat pedig már mind ki tudtuk számítani és a kapott függvénybe visszahelyettesítettük x-et. Az első példa esetében először a helyettesítés integrálás fenti képletét használva részleteztük a számolást, és utána mutattam meg a „formális" módszert. A harmadik integrált elég részletesen végigrágtuk: miért lesz $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, hogyan integráljuk a $\cos^2 t$ függvényt (itt kellett egy kis trigonometria a kétszeres szög koszinuszával kapcsolatban), valamint a végeredményben megjelenő $\sin(2 \arcsin x)$ függvényt is a $2x\sqrt{1-x^2}$ egyszerűbb alakra hoztuk (ugyancsak némi trigonometria segítségével).

Ezek után az $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$ integrállal foglalkoztunk. Bevezettem az

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

függvényeket, amelyek neve: szinusz és koszinusz hiperbolikusz. Beláttuk, hogy $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, valamint $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$ és $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$, ezenkívül a grafikonokat is vázoltam. Mindezek ismeretében az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést végeztük el az iménti integrálban, amiből így $\int \operatorname{ch}^2 t \, dt$ adódott (felhasználva, hogy $\operatorname{ch} t > 0$). Észrevettük, hogy $\operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t + 1)$, így az integrált tovább alakíthattuk. A végeredményhez szükségünk volt még az sh inverzére, erre az arsh jelet vezettem be (neve: area szinusz hiperbolikusz). Megemlítettem – sőt a levezetés lényegét is vázoltam –, hogy az arsh valójában felírható logaritmus segítségével. Mindezt már nem részleteztem, és az intgegrált sem számoltuk végig, szükség lett volna még az $\operatorname{sh} 2x$-re vonatkozó addíciós formulára. Lehet, hogy ezek még szóba kerülnek valamelyik gyakorlaton. A téma lezárásaként még meséltem néhány érdekességet a ch függvény grafikonjával kapcsolatban, amelynek neve láncgörbe.

Az integrálási technikák témakörének végén a racionális törtüggvények (azaz polinom/polinom alakú kifejezések) integrálásába kóstoltunk bele, de csak az elsőfokú/másodfokú esetet vizsgálva és csupán példákon keresztül (az azonban általánosan megjegyeztük, hogy polinomosztás miatt mindig feltehető, hogy a racionális törtfüggvény számlálójának foka kisebb, mint a nevező foka). Ha a nevezőnek két különböző valós gyöke van, akkor parciális törtekre bontunk:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2} \right) dx = \frac{2}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log|x+2| + C.$$

(A parciális törtekre bontásnál elmondtam a „hagyományos” módszert és a „letakarásos varázslatot” is.) Amikor a nevezőnek nincs valós gyöke, ekkor teljes négyzetté alakítottunk és kettébontottuk az integrált:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$\underset{\int f(ax+b)dx = F(ax+b)/a}{\overset{\int \frac{f'}{f} = \log|f|}{=}} \log|x^2+2x+2| - \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C.$$

Végül ha a nevezőnek két azonos valós gyöke van:

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C,$$

vagy másképpen alakítva

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\log|x-1|^2 - \frac{1}{x-1} + C,$$

(Valójában itt is parciális törtekre bontásról van szó, csak más a parciális tört, mint előbb, mert annak nem lenne értelme, hogy $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1}$ alakban írjuk fel.)