Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

5. előadás (március 10.)

Új témakört kezdtünk (de mindössze két előaáson keresztül tart): primitív függvény. Nagyon leegyszerűsítve a következőről lesz szó. Eddig egy adott differenciálható függvényből kiindulva képeztük annak deriváltját. Most visszafelé gondolkodunk, adott egy függvény, és azt kérdezzük, hogy melyik függvénynek a deriváltja (ha egyáltalán létezik ilyen függvény). Sajnos ez egy sokkal nehezebb, sőt gyakran lehetetlen feladat. A deriválásra megvannak a szabályok, „akármilyen bonyolult” differenciálható függvényt tudunk deriválni, azonban a visszafele irányban csak igen korlátozott módszereink vannak, amelyek használata sem olyan egyszerű, mint a deriválás esetében. Példaképpen említettem, hogy van olyan függvény, amelynek deriváltja a e^{-x^2}, és olan is, amelynek $\sin x/x$, de ezeket az elemi függvényeink segítségével nem tudjuk felírni.

Motivációként két példát hoztam fel, amelyek azt illusztrálják, hogy hol fordulnak elő ilyen fordított irányú, $f' \xrightarrow{?} f$ jellegű kérdések.

Elsőként egy fizikai példát említettem: ismerjük egy egyenes vonalú mozgást végző autó pillanatnyi sebességét leíró $v(t)$ függvényt, és keresendő, hogy a t időpillanatban mi a helyzete, $x(t)$. Arról van szó, hogy adott $v(t) = x'(t)$ és keresendő $x(t)$, amihez természetesen szükséges ismerni a kezdeti pozíciót, $x(0)$-t.

A második példa a területszámításból származik: határozzuk meg az x^2 függvénynek a $[0, x]$ intervallum feletti grafikonja és az x tengely által közrezárt síkidom területét. A területet $T(x)$-szel jelölve beláttuk, hogy $0 < x < y$ esetén $(y-x)x^2 \le T(y) - T(x) \le y^2(y-x)$, így (a hasonlóan kapható $y < x$ esetet is figyelembe véve) $T'(x) = x^2$. A T függvényről még azt is tudjuk, hogy $T(0) = 0$.

Ennyi motiváció után rátértünk a téma felépítésére. Definiáltam a primitív függvény fogalmát: az $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, ha $F' = f$ az (a,b) intervallumon. Az integrálszámítás alaptételéből következően, ha f-nek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, és ezek konstansban térnek el egymástól („a primitív függvény additív konstans erejéig egyértelmű”). A primitív függvények halmazát f határozatlan integráljának hívjuk, amelynek jelölése: $\int f(x)\,dx$, vagy $\int f$. Beláttuk, hogy a szignumfüggvénynek $\mathbb{R}$-en nincs primitív függvénye (de például a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon van!). Ezután pedig felírtam az alapintegrálokat (ezeket tudni kell).

$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{ha } \alpha \neq -1, x > 0, \\ \log|x| + C, & \text{ha } \alpha = -1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq k\pi)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \quad (x \in (-1,1))$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

A $\int 1/x\,dx = \log|x| + C$ integrált részletesen megbeszéltük: miért kell abszolútértékjel. Végül visszatértünk a $T(x)$ területfüggvényre és kihoztuk, hogy $T(x) = x^3/3$ (ha $x > 0$).

Ezt követően jöttek az integrálási szabályok (a megfelelő feltételekkel):

$$\int (f+g) = \int f + \int g,$$
$$\int \lambda f = \lambda \int f,$$
$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \quad (a \neq 0, F' = f),$$
$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, f > 0),$$
$$\int \frac{f'}{f} = \log|f| + C \quad (f \neq 0).$$

A bizonyítást megnéztük a két utolsó kivételével, azt házinak adtam (csak azt kell ellenőrizni, hogy a jobb oldal deriváltja éppen a bal oldali integrandus, és közben a láncszabályt alkalmazzuk). Mindegyik szabályra néztünk legalább két példát is:

$$\int (x+1)^3\,dx, \quad \int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx, \int \sqrt{2x-3}\,dx, \int \frac{1}{2+3x^2}\,dx, \quad \int x\sqrt{x^2+1}\,dx, \quad \int \mathrm{tg}\,dx.$$

Végül a parciális integrálás tételét mondtam ki és láttuk be a szorzat deriválási szabályának segítségével:

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Az órát a parciális integrálás egy példájával zártuk (felírtuk részletesen a szereposztásokat): $\int xe^x\,dx$.