Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

2. előadás (február 20.)

Az előadás első felében a Taylor-polinomkhoz kapcsolódó példákkal foglalkoztunk.

Az első példánk – ezt már a múlt órán is felírtuk – az e^x függvény $a = 0$ körüli Taylor-polinomjai. Mivel az exponenciális függvény bármely deriváltja önmaga, így

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

A Lagrangre-maradéktag felidézése után rögtön alkalmaztuk is az iménti Taylor-polinomra:

$$R_n(x) = e^x - T_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ha $x \in (-R, R)$, akkor $c \in (-R, R)$, ezért $|e^c| \le e^R$, ahonnan a nagyságrendek figyelembe vételével kaptuk, hogy $R_n(x) \to 0$ minden $x \in (-R, R)$ esetén, végső soron tehát minden x valós számra. Másképpen fogalmazva: minden x valós szám esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \right) = 0.$$

A félév végén – a végtelen sorok alapjainak lefektetését követően – azt fogjuk írni, hogy

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

és a jobb oldalt Taylor-sornak fogjuk nevezni. Speciálisan

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

Az e szám kapcsán megmutattuk, hogy irracionális. Indirekt okoskodtunk, ha $e = p/q$ (ahol p és q pozitív egészek), akkor a fenti Lagrange-maradéktagot $x = 1$-ben alkalmazva

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Az egyenlőtlenséget tetszőleges elég nagy n pozitív egész ($n > 4$, $n > q$) esetén $n!$-sal beszorozva, $e^c < e < 4$ felhasználásával adódik, hogy

$$0 < \frac{p}{q}q! - n! - \frac{n!}{1!} - \cdots - \frac{n!}{n!} < \frac{4}{n+1}.$$

Ez viszont ellentmondás, mert középen egy egész szám áll, amit befogtunk 0 és 1 közé.

Ezek után a következő példánk a sin volt. Felírtuk a deriváltakat, és láttuk a periodicitást. Ennek ismeretében az $a = 0$ körüli első néhány Taylor-polinomot megadtuk:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x, \quad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

A Lagrange-maradéktag segítségével beláttuk, hogy $R_n(x) \to 0$ minden valós x-re, következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right) = 0,$$

ahonnan a sin Taylor-sora adódik:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots.$$

Harmadik példánk a cos függvény volt $a = 0$ körül. Csak az első néhány Taylor-polinomot írtuk fel:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 1, \quad T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

A maradéktag 0-hoz tartása a sin mintájára megy, ezt kihagytuk.

Negyedik példánk a $\log(1 + x)$ függvény volt $a = 0$ körül. Észrevettük, hogy $n \geq 1$ esetén $(\log(1 + x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, és ebből adódóan:

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Ezzel a polinommal a múlt órán már találkoztunk, amikor a $\log(1 + x)$ alsó és felső becsléseit adtuk meg. Ebben az esetben tehát a Taylor-polinom hol kisebb, hol nagyobb $f(x)$-nél és így közelíti azt (alternáló módon). Azt mondtam, hogy érdemes végiggonolni, mit lehet mondani a maradáktag 0-hoz tartásáról, mely x-ekben következik ez a Lagrange-maradéktag alapján (nem minden $x > -1$ esetén!). Ezzel a példákat befejeztük.

Rátértünk a L'Hospital-szabályra, amely $0/0$ vagy $\pm\infty/\pm\infty$ alakú kritikus limeszek esetében nyújthat segítséget. Előtte azonban egy másik technikát vázoltam: ez a „kis ordó". A mintapéldánk:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}.$$

Használjuk fel, hogy a mostani órán megismert Taylor-polinomok, valamint a múlt órán a Taylor-polinom maradéktagjáról szóló tételünk alapján

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

Ekkor (közben $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ felismerésével)

$$\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2!} + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{2!} + \frac{o(x^3)}{x^3}} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{3}.$$

Ezután kimondtam a L'Hospital-szabály kétféle változatát. Az f, g függvények legyenek differenciálhatók az α (ami lehet $a \in \mathbb{R}$, $a + 0$, $a - 0$, $\pm\infty$) egy pontozott környezetében, továbbá ebben a környezetben g és g' nem egyenlő 0-val. Tegyük fel, hogy $\lim_\alpha f = \lim_\alpha g = 0$. Ekkor

$$\exists \lim_\alpha \frac{f'}{g'} (= b \in \mathbb{R} \text{ vagy } \pm\infty) \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_\alpha \frac{f}{g} = \lim_\alpha \frac{f'}{g'}.$$

A második változat annyiban különbözik, hogy $\lim_\alpha f = \lim_\alpha g = 0$ helyett a $\lim_\alpha g = \pm\infty$ feltevéssel élünk (igen, meglepő módon, nem kell f-ről feltenni határértéket, noha általában $\pm\infty/\pm\infty$ alakú kritikus limeszekre fogjuk alkalmazni).

Csak az első változat $\alpha = a + 0$, $\lim_\alpha f = 0 \lim_\alpha g = 0$ speciális esetét bizonyítottuk a Cauchy-középértéktétel segítségével.

Alkalmazásképpen megnéztük a bevezető mintapéldánkat, és láttuk, hogy a L'Hosptial-szabályt háromszor kell alkalmazni. Megjegyeztem, hogy csak a deriváltak hányadosának határértékének létezéséből következtethetünk a függvények hányadosának határértékére. A $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos}{x^2} = 0$, $\nexists \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin x}{1}$ példa mutatja, hogy az f/g határértékének létezéséből nem következik f'/g' határértékének létezése, és f'/g' határértékének nem létezése nem jelenti azt, hogy az f/g határérték nem létezik (természetesen mindenhol α-ban értjük a határértéket).

Végül a következő alkalmazással zártuk az előadást: $a > 1$ valós és n pozitív egész esetén

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \log a}{n x^n} = \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\log a)^n}{n!} = +\infty.$$

(Vigyázat: mindegyik lépésben ellenőrizni kell a tétel alkalmazhatóságát, és az egészet visszafelé kell olvasni!) Ez utóbbi limeszt egyébként már korábban a nagyságrendek kapcsán is bizonyítottuk.