Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

12. előadás (május 15.)

Az órát azzal kezdtem, hogy néhány apró megjegyzést fűztem a múlt előadáson tanultakhoz – ezek általában gyakorlaton, feladatmegoldás közben jönnének elő, de már nem lesz gyakorlat, ezért én mondom el.

A gyökkritériumon és a majoráns kritériumon illusztráltam, hogyan lehet tetszőleges tagú sor esetében abszolút konvergenciára következtetni. Például, ha létezik $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $\sum |a_n|$ konvergens, vagyis $\sum a_n$ abszolút konvergens (tehát konvergens is). Hasonlóan, ha $|a_n| \le b_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

A harmadik megjegyzésem a Leibniz-sorokra vonatkozott. Az $a_n = (-1)^n/n^2$ példájával hívtam fel a figyelmet, hogy $\sum (-1)^n a_n$ akkor is lehet konvergens, ha az (a_n) sorozat nem monoton csökkenő módon tart 0-hoz. Más szóval, a Leibniz-kritérium csupán egy elégséges feltételt ad a konvergenciára.

Ezek után a félév utolsó témakörére, a Taylor-sorokra tértünk rá. A félév elején a Taylor-polinomok volt az egyik első anyagrész, ezt tesszük most teljessé a sorok fogalmának ismeretében. Először emlékeztettem a Taylor-polinom és a maradéktag fogalmára, valamint a Lagrange-féle maradéktag alakjára.

Ha az f függvény akárhányszor differenciálható egy a pontban, akkor a Taylor-sora az a pontban:

$$T_(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ez természetesen ismét csak egy formális sor. Két kérdés merül fel: milyen x pontban konvergens a sor, és mi ekkor az összege? Észrevettük, hogy $x = a$-ban mindig konvergens a Taylor-sor és összege $f(a)$. A konkrét példa megadása nélkül megemlítettem, hogy ennél több általában nem mondható: van olyan függvény (de nem könnyű ilyet konstruálni), amelynek a Taylor-sora a középponton kívül sehol sem konvergens. Ezután a Cauchy-féle példával illusztráltam azt, hogy ha konvergens a Taylor-sor valamely pontban, akkor sem biztos, hogy a függvényt fogja előállítani. Ha $f(x) = e^{-1/x^2}$ az $x = 0$ pont kivételével és $f(0) = 0$, akkor belátható, hogy $f^{(n)}(0) = 0$ bármely n esetén, így f-nek a 0 ponthoz tartozó Taylor-sora az azonosan 0 függvényt állítja elő, nem pedig f-et.

Használni fogjuk azt az elnevezést, hogy a Taylor-sor előállítja az f-et az x pontban, ha a Taylor-sor konvergens x-ben és összege $f(x)$. Amennyiben egy egész intervallumon teljesül ez (az a körül), akkor analitikus függvényről szoktunk beszélni.

Ezután megfogalmaztunk egy elégséges feltételt az előállíthatóságra vonatkozóan: ha f az I intervallum minden pontjában akárhányszor differenciálható és van olyan K valós szám, hogy minden $n = 0, 1, 2, \dots$ esetén és minden $x \in I$-re $|f^{(n)}(x)| \le K$ (a deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak), akkor tetszőleges $a \in I$ pontot véve az a körüli Taylor-sor előállítja f-et az I intervallumban, azaz

$$T(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

Alkalmazásképpen felírtuk az sin, cos és exp Taylor-sorait a 0 körül:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Az iménti előállítások minden x valós számra fennállnak. A sin és cos esetében triviálisan alkalmazható az elégséges feltétel a $K = 1$ korláttal. Az exp esetében először a $(-R, R)$ intervallumon tekintjük a függvényt, amelyen $K = e^R$ jó felső korlát; ezután pedig R-el tartunk a végtelenhez.

A fentiekhez kapcsolódóan végül még annyit jegyeztem meg, hogy $x = 1$ helyettesítéssel az e^x Taylor-sorából azt nyerjük, hogy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots.$$

Az óra utolsó fél órájában három könyvből olvastam fel egy-egy érdekes részletet. Az első történet címe: „A hosszú élet titka: az analízis”. A második két részlet arról szólt, hogy miért tanulunk olyan dolgokat is, amelyeket később szinte biztosan nem fogunk használni (a harmadik részlet címe éppen ez volt: „Mikor fogom én ezt használni?”).