# Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

**11. előadás (május 8.)**

Az órát a Leibniz-kritérium bizonyításával kezdtük – ezt a múlt órán félbehagytuk. Ismét „felrajzoltam"a bizonyítás ötletét, és felelevenítettük, hogy a részletösszegek egy monoton növő és egy monoton csökkenő részsorozatra bonthatók szét (páros és páratlan indexeknek megfelelően), ráadásul a monoton növő minden tagja kisebb a monoton csökkenő bármely tagjánál. Ebből következően mindkettő konvergens, és mivel a különbségük 0-hoz tart, ezért ugyanaz a határértékük. Példaképpen a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ sor írtam fel, és a félév elejére visszahivatkoztam, amikor már valójában azt is beláttuk, hogy az összege $\log 2$. Itt megjegyzésként elmondtam ennek az eredménynek egy másik bizonyítását. Ez azon múlt, hogy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

ahol a jobb oldalon az $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ integrál egy alsó összege áll, így a határértéke $\log 2$. A félév elejére visszautalva felírtam még egy Leibniz-sort (valójában erről kapták a nevüket, mert Leibniz erre volt büszke, noha előtte már Grégory is ismerte az összefüggést):

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots.$$

Ezek után rátértünk az abszolút konvergencia témakörére. Definiáltam az abszolút konvergencia fogalmát, amely azt jelenti, hogy $\sum|a_n|$ konvergens. A definícióban a $\sum a_n$ sor konvergenciájáról nem teszünk fel semmit, mert ez következik az abszolút konvergenciából. Ennek a tételnek a bizonyításához szükségünk volt a Cauchy-kritériumra, ehhez emlékeztettem a sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-kritériumra. Ezt kell alkalmazni a sor részletösszegeire és rögtön megkapjuk a sorok konvergenciájára vonatkozó változatot: $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $N$, hogy minden $m>n>N$ esetén $\left|\sum_{i=n+1}^{m}a_i\right|<\varepsilon$.

A Cauchy-kritérium és többtagú háromszög-egyenlőtlenség segítségével igazoltuk, hogy az abszolút konvergenciából következik a konvergencia. A bizonyítás után rögtön felhívtam a figyelmet, hogy visszafele nem igaz a tétel, a sor konvergenciájából nem következik az abszolút konvergencia: például $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergens sor, de $\sum\frac{1}{n}$ divergens. Az olyan sorokat, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek, feltételesen konvergens soroknak nevezzük.

Ezután egy kis mese következett arról, hogy a feltételesen konvergens sorok gyakran nem úgy viselkednek, ahogy elvárnánk. Például feltételesen konvergens sorok összegzési sorrendjét nem szabad megváltoztatni (átrendezni), mert az összeg megváltozhat. Példaképpen az $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ (részeg fáradékony bolha) sort rendeztem át többféleképpen:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{1}{2}\log 2,$$
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\log 2,$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots\ \text{divergens.}$$

Itt megemlítettem Riemann átrendezési tételét, mely szerint egy feltételesen konvergens sor átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, de úgy is, hogy tetszőleges $A$ szám legyen az összege.

Ezek után a $\gamma$ számmal kezdtünk foglalkozni. Először a harmonikus sor részletösszegeivel kapcsolatban két becslést mondtam ki: $n>1$ esetén $\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1$. A bizonyítás azon múlt, hogy $(1+1/n)^n<e<(1+1/n)^{n+1}$ (csak a $\log n$ alsó becslést láttam be, a másikra mindössze utaltam). A másik állítás pedig az volt, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}-\log n$ sorozat monoton csökkenő, és mivel alulról korlátos, így konvergens. A limesz az Euler-féle $\gamma\approx 0,577$ szám, amelyről megoldatlan, hogy racionális vagy irracionális.