Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

10. előadás (április 24.)

Az előadás témája a nemnegatív tagú sorok konvergenciakritériumai voltak. Egy észrevétellel kezdtem, amelyet gyakran használunk: egy sor konvergenciáját nem befolyásolja az összegzés kezdőindexe. Röviden meg is gondoltuk, hogy ez miért igaz: a részletösszeg-sorozatok csak egy adott konstansban (néhány tag összegében) térnek el egymástól.

Ezt követően kimondtam az összehasonlító (majoráns és minoráns) kritériumokat, és aztán igazoltuk is. A bizonyítás a részletösszegek felülről (nem) korlátosságán és a megfelelő írányú becslésen múlt. Felhívtam a figyelmet arra, hogy a nemnegativitás lényeges, hiszen $a_n = -1 \leq b_n = 0$ választással $\sum b_n$ konvergens, de $\sum a_n$ divergens. Néztünk három példát az összehasonlító kritériumok alkalmazására: $\sum \frac{n}{n^2+1}$ divergenciáját, amely az $\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ becslésből és a minoráns kritériumból következik; továbbá $\sum \frac{1}{n^2+2}$ konvergenciáját, amely az $\frac{1}{n^2+4} < \frac{1}{n^2}$ becslésből és a majoráns kritériumból következik; valamint $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergenciája, amely az $n \geq 3$ esetén érvényes $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ becslésből és a majoráns kritériumból következik.

Ezután a gyökkritériummal folytattuk. Ezt három részben mondtam ki (mindhárom esetében $a_n \geq 0$ feltétel elég nagy n-re): 1. ha van olyan $0 \leq q < 1$, hogy valamilyen N küszöbtől kezdődően $\sqrt[n]{a_n} < q$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 2. ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 3. ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens. Az 1. bizonyítása a mértani soral való összehasonlításon múlt; a 2. részből következik az 1. feltételeinek teljesülése; a 3. feltétele pedig magával vonja a triviális kritérium nemteljesülését. Rögtön megjegyeztem, hogy ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor általában se a konvergenciára, se a divergenciára nem következtethetünk, mert például a $\sum \frac{1}{n}$ és $\sum \frac{1}{n^2}$ sorokra a limesz éppen 1, de az egyik divergens, míg a másik konvergens. Néztünk ezután két példát: újfent megnéztük a $\sum(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ sort, amelyre $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$; továbbá a $\sum \frac{n}{2^n}$ sort, amelyre a kérdéses limesz $1/2$ (feltettem azt a kérdést is, hogy vajon mennyi a sor összege, és meséltem hozzá egy körítést is a bankba elhelyzett összegről, amelyből az n-edik évben n Forintot szeretnénk kifizetni gyermekünk születésnapján). Végül a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$ sor példáján szemlélettem a kritérium 1. részének alkalmazását (erre a sorra a 2. rész nem alkalmazható).

Következett a hányados kritérium, amelyet ugyancsak három részben mondtam ki ($a_n \geq 0$ itt is fel van téve minden elég nagy n-re): 1. ha van olyan $0 \leq q < 1$, hogy valamilyen N küszöbtől kezdődően $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 2. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 3. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens. A bizonyítás ismét a mértani sorral való összehasonlíthatóságon múlt. Példaképpen megnéztük a $\sum \frac{1000^n}{n!}$ sort, ahol láttuk az $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$ határértéket; továbbá a $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$ sort és láttuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$ (mindkét példa esetében először a gyökkritériummal is megpróbálkoztunk, de abba az akadályba ütköztünk, hogy $\sqrt[n]{n!}$, valamint $\sqrt[n]{n!}/n$ limeszeire lett volna szükségünk, és ezek – legalábbis az utóbbi – nem triviálisak). Mutattam arra is példát, hogy a gyökkritérium alkalmazható, de a hányadoskritérium nem: ha $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$, akkor például $q = 2/3$ választással teljesül a gyökkritérium 1. változata, de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ akármilyen nagy értékeket is felvesz. Ennek ellenére a hányadoskritériumot célszerűbb sok esetben alkalmazni, mert egyszerűbb a kérdéses limesz számolása.

Ezt követően a kondenzációs kritériumot mondtam ki. A bizonyításnak csak az ötletét vázoltam: a harmonikus sor divergenciájánál látott „sűrítéshez” hasonló, alsó és felső becsléssel. Alkalmazásképpen igazoltuk, hogy a hiperharmonikus sorok pontosan $c > 1$ kitevő esetén konvergensek, továbbá beláttuk, hogy $\sum \frac{1}{n \log n}$ divergens sor.

Végül a Leibniz-kritérimot tárgyaltuk (ennek kapcsán a Leibniz-típusú vagy alternáló sor kifejezéseket is megemlítettem). A bizonyítást „felrajzoltam”, és a leírásban addig jutottunk, hogy a részletösszegek egy monoton növő és egy monoton csökkenő részsorozatra bonthatók szét.