Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2018. tavasz

1. előadás (február 13.)

A technikai és tematikai tudnivalók után rátértünk az első rövid témakörünkre: differenciálszámítás alkalmazása egyenlőtlenségek igazolására. A motiváció így hangzott: ha f és g két hegymászó egy magasságról indul úgy, hogy g minden pillanatban legalább olyan meredeken emelkedik, mint f, akkor g mindig legalább olyan magasan lesz, mint f. Matematikailag: ha f és g folytonos $[a,b]$-n és differenciálható az intervallum belsejében, továbbá $f(a) \le g(a)$ és $f'(x) \le g'(x)$, ha $x \in (a,b)$, akkor $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén. Alkalmazásképpen a következő csinos egyenlőtlenségeket mondtam ki:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{2n}}{2n} \le \log(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (x \ge 0),$$
$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} \le \operatorname{arctg} x \le x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \quad (x \ge 0).$$

Csak a logaritmusra vonatkozó egyenlőtlenségláncolat bal oldali egyenlőtlenségét igazoltam a „hegymászós" tétellel. A többi ennek mintájára házi feladat. Megjegyeztem, hogy $x = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} \le \log 2 \le 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}.$$

Ebből $n \to \infty$ esetén a

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

végtelen összeg adódik (erről a félév végén fogunk tanulni, egyelőre nem tisztázott fogalom). Az arctg esetében a $\pi/4$-re kapunk egy végtelen összeg előállítást:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Ezután rátértünk a Taylor-polinomok témakörére. Először beláttuk, hogy ha

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

akkor $a_k = p^{(k)}(0)/k!$ (valójában csak $k = 0, 1, 2$ értékeket néztük meg, az általános eset házi feladat). Következésképpen:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

amit a 0-ból a-ba eltolva

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Felmerül a kérdés, hogy ha p polinom helyett tetszőleges, az a-ban n-szer differenciálható függvényt tekintünk, akkor vajon mi a kapcsolat $f(x)$ és a hozzá tartozó polinom között. Definiáltuk ezért az f függvény a pontbeli n-edik Taylor-polinomját:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

vagyis

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Itt az a pont – a jelölés egyszerűsítése érdekében – nincs jelezve a bal oldalon, de fontos észben tartani!) Példaképpen megnéztük, hogy $n = 0, 1$ esetén mi is a Taylor-polinom: $T_0(x) = f(a)$ és $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Ezután kimondtuk a Taylor-polinom a-beli deriváltjaira vonatkozó fontos tulajdonságát: $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ minden $0 \leq k \leq n$ esetén. A bizonyítást megint csak az első néhány konkrét értékre néztük meg, de ez valójában ugyanaz, mint a korábbi polinomos képlet levezetése volt. A deriváltak egyenlősége szemléletesen azt jelenti, hogy a polinom grafikonja „jól odasimul" f grafikonjához az a pontban. Felmerül a kérdés, hogy mit lehet mondani f és T_n közelségéről? Erre vonatkozóan két tételt fogalmaztunk meg. Az első azt mondta ki, hogy az $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ maradéktag még $(x - a)^n$-nel leosztva is 0-hoz tart midőn $x \to a$:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \to 0 \quad (x \to a).$$

Megnéztük a bizonyítást $n = 0, 1, 2$ esetén. Az $n = 0$ triviális, az $n = 1$ a differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazása, az $n = 2$ eset pedig Lagrange-középértéktétellel az f' differenciálhatóságának ekvivalens megfogalmazására vezet. Megjegyzésben bevezettem az $o((x - a)^n)$ (ejtsd: kis ordó) jelölést, erre majd később még visszatérek egy példa erejéig.

A maradéktagra vonatkozó másik tételünk a Lagrange-maradéktag volt: amennyiben az f függvény $(n + 1)$-szer differenciálható az $[a, x]$ intervallum minden pontjában, akkor létezik $c \in (a, x)$, hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Vigyázat, itt c függ az x-től, csak annyit tudunk róla, hogy $c \in (a, x)$. A tétel bizonyítását kihagytam.

Az órát egy példával zártam: az e^x Taylor-polinomjait írtuk fel a 0 pontban:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}.$$

Jövő órán további példákkal folytatjuk.