

Egyváltozós analízis 2. vizsgatematika

Osztatlan matematikatanár szak, 2018. tavasz

Tudnivalók a vizsgáról. A vizsgákra a Neptunban kell jelentkezni, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsga előtti napon a vizsgáztató oktató emailben küld vizsgabeosztást. A vizsgára kényelmes ruhában érdemes jönni, nem kell kiöltözni. Konzultációra általában hétköznap délutánonként 15 órától Besenyei Ádámnál a Déli tömb 3.619-es szobájában van lehetőség előzetes jelentkezés esetén (emailben vagy személyesen). Bármilyen probléma vagy kérdés esetén tessék nyugodtan emailt írni.

A vizsgán ezen a tematikán kívül semmilyen segédeszköz nem használható, üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga megkezdésekor mindenki egy feladatot és mellé párosítva két tételt húz (amelyek a tétel sor három különböző részét fedik le), majd 1 óra felkészülési időt kap. Az elégséges jegy feltétele a **feladat megoldása** (esetleg apróbb segítséggel), a **definíciók és tételek pontos kimondása és értéke** (ezt egyszerű kérdésekkel konkrét példákon könnyű ellenőrizni), a **bizonyítások alapgondolatának és főbb lépéseinek ismerete**, továbbá a **húzottaktól eltérő tételekből szűrőpróbaszerűen feltett kérdésekre való helyes válaszadás** (e kérdések is definíciók, tételek, ellenpéldák ismeretét és értését ellenőrzik).

Vizsgakérdések.

1. A differenciálszámítás alkalmazása egyenlőtlenségek igazolására. A $\log(1+x)$ és $\arctg x$ függvények alsó és felső becslései polinomokkal.
2. Összefüggés polinom deriváltjai és együtthatói között. Taylor-polinom értelmezése és deriváltjainak kapcsolata a függvény deriváltjaival. Példák: \exp , \sin , \cos és $\log(1+x)$ Taylor-polinomjai.
3. Maradéktag, $R_n(x)/(x-a)^n$ határértéke. Lagrange-maradéktag.
4. Az \exp függvény Taylor-polinomjai és a polinomok konvergenciája. Az e szám sor alakban való előállítása és irracionalitása.
5. A L'Hospital-szabály kétféle változata. Ellenpélda a fordított irányú következtetésre. Alkalmazás: $(x - \sin x)/(x - x \cos x)$ határértéke 0-ban, a^x/x^n határértéke végtelenben.
6. Sebesség és parabola alatti terület mint derivált. Primitív függvény, az egyértelműség kérdése. Példa olyan függvényre, amelynek nincs primitív függvénye. Határozatlan integrál.
7. Határozatlan integrál és műveletek. Integrálási szabályok: lineáris helyettesítés, $f^\alpha f'$ és f'/f alakú integrandusok (példákkal), parciális integrálás (példák: xe^x , $e^x \cos x$, $\log x$).
8. Helyettesítéses integrálás, példák: te^{t^2} , $1/(\sqrt{x}+1)$, $e^{2x}/(e^x+1)$, $\sqrt{1-x^2}$. Hiperbolikus függvények helyettesítése a $\sqrt{1+x^2}$ integráljában. Másodfokú nevezőjű racionális törtfüggvények integrálja.
9. Parabola alatti terület közelítései. Felosztás, alsó és felső összegek, viselkedésük finomítás hatására. Alsó és felső integrál, Riemann-integrálhatóság. Példák: Dirichlet-, konstansfüggvény, x^2 .
10. Hasznos kritérium. Oszcillációs összeg. Monoton függvények integrálhatósága.
11. Riemann-összeg, kapcsolata az alsó és felső összegekkel. A folytonosság ε - δ definíciója és a δ függése x_0 -tól: $1/x$ a $(0, 1]$ -en és $[1, \infty)$ -en, x^2 az $[1, \infty)$ -en és $[1, 100]$ -on.
12. Egyenletes folytonosság. Heine tétele.
13. Folytonos függvények Riemann-integrálhatósága. Konstansszoros és összegfüggvény Riemann-integrálhatósága.
14. Szorzat, abszolútérték, reciprok, kompozíció Riemann-integrálhatósága. Integrál és egyenlőtlenségek. A Riemann-integrál intervallum szerinti additivitása.

15. Newton–Leibniz-tétel. Riemann-integrálokra vonatkozó parciális integrálás és helyettesítéses integrálás. Példák: $\int_1^2 x \log x \, dx$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$.
16. Integrálfüggvény és tulajdonságai. Példa: szignumfüggvény integrálfüggvénye a $[-1, 1]$ -en.
17. A területfüggvény tulajdonságai. Normáltartomány és területe. Példa: egység sugarú negyedkör-lap területe. Forgástest és térfogata. Példa: egységgömb térfogata.
18. Grafikon ívhossza. Példa: egység sugarú negyedkörív ívhossza. Improprius integrál $[a, b)$ -n. Példák: $\int_0^1 1/\sqrt{1-x^2} \, dx$, $\int_0^1 1/\sqrt{x} \, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2) \, dx$.
19. Végtelen sor részletösszegei, a sor konvergenciája, divergenciája, összege. Példák: $a_n = 0$, $a_n = 1$, $a_n = (-1)^n$. Mértani sor. Tizedes törtek és végtelen sorok. Konvergencia és algebrai műveletek.
20. Sor konvergenciájának szükséges feltétele, ellenpélda a megfordításra. Nemnegatív tagú sor konvergenciája és a részletösszeg-sorozat korlátossága.
21. Sor konvergenciája független az összegzés kezdőindexétől. Harmonikus sor, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.
22. Összehasonlító kritériumok (majoráns, minoráns), példák: $\sum \frac{n}{n^2+1}$, $\sum \frac{1}{n^2+2}$, $\sum (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$. Példa a nemnegativitás szükségességére.
23. Gyökkritérium, példák: $\sum (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$, $\sum \frac{n}{2^n}$. Példa olyan konvergens sorra, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ nem létezik. Példa konvergens és divergens sorokra a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetben.
24. Hányados kritérium, példák: $\sum \frac{1000^n}{n!}$, $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$. Kondenzációs kritérium, példák: hiperharmonikus sorok, $\sum \frac{1}{n \log n}$.
25. Leibniz-kritérium, példa: a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1/n$ sor és összege.
26. Abszolút konvergencia. Cauchy-kritérium. A konvergencia és az abszolút konvergencia kapcsolata. Feltételes konvergencia, példa.
27. A harmonikus sor részletösszegeinek alsó és felső becslése logaritmussal. Az $1 + 1/2 + \dots + 1/n - \log n$ sorozat monoton csökkenése és konvergenciája, a γ szám.
28. Taylor-sor. A sor előállítja a függvényt jelentése, példa: az előállítás csak egyetlen pontban teljesül. Az előállítás egy elégséges feltétele. Példák: \sin , \cos , \exp Taylor-sorai. Az e szám sor alakja.