

# Csemegék az analízisből középiskolai ízesítéssel

Besenyei Ádám  
badam@cs.elte.hu

## 5. hét

5.1. Legyen az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés olyan, hogy tetszőleges  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$$

teljesül.

- Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $x_0 \in \mathbb{R}$  esetén az  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) rekurzióval értelmezett  $(x_n)$  sorozat konvergens.
- Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik olyan  $x^* \in \mathbb{R}$ , hogy  $f(x^*) = x^*$  (azaz a leképezésnek van fixpontja, méghozzá egyetlen).

Tanárképző főiskolai versenyfeladat volt

5.2. Legyen  $a_1 = a > 0$  tetszőleges és  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$ , ahol  $n = 1, 2, \dots$ . Mutassuk meg, hogy  $a_n \rightarrow \sqrt{a}$ .

Newton-féle négyzetgyökvonási eljárás, avagy babiloni módszer